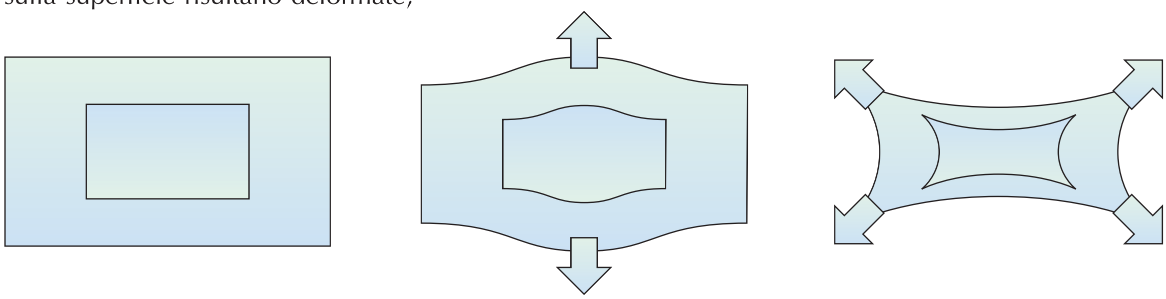
Scheda di approfondimento

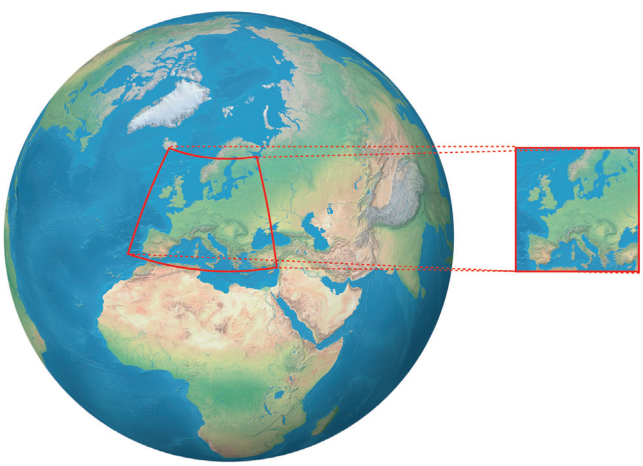
La topologia

Nel testo base ci siamo occupati di trasformazioni in cui almeno una caratteristica fondamentale delle figure restava invariata: la linearità. Nelle trasformazioni isometriche e non isometriche che abbiamo studiato, infatti, le linee rette restavano linee rette. Esistono però trasformazioni geometriche in cui le linee rette diventano curve. Ciò può avvenire:

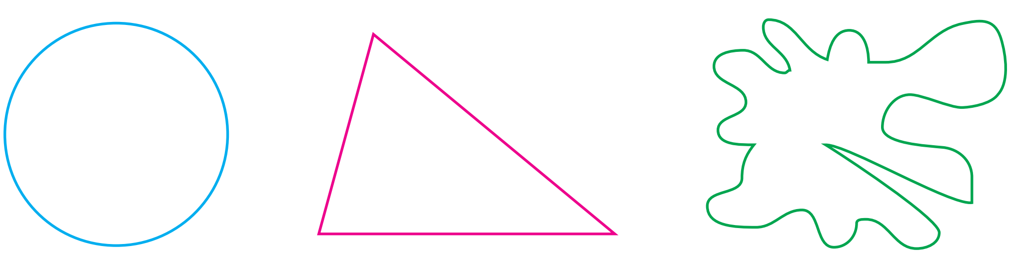
- se ad una superficie piana viene applicata una tensione elastica, in modo tale che le figure che si trovano sulla superficie risultano deformate;



- se una figura piana viene proiettata su una superficie curva;



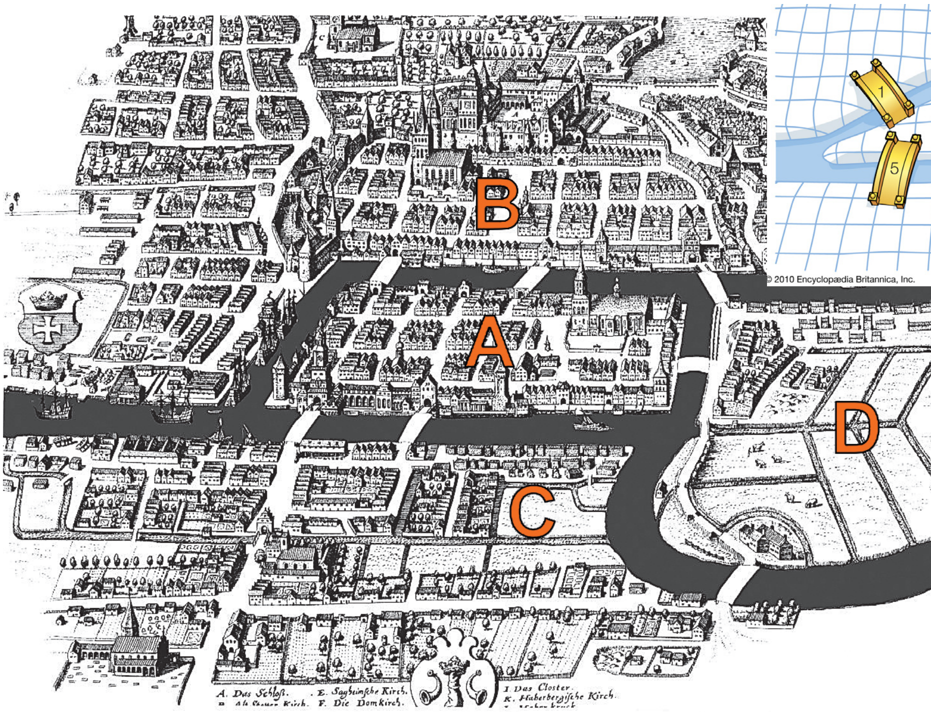
Trasformazioni di questo genere prendono il nome di **trasformazioni topologiche** e la disciplina che le studia si chiama **topologia**.
Nelle figure topologiche la misura della superficie, la lunghezza delle linee, gli angoli, perdono importanza. Ciò che conta sono alcune caratteristiche relative ai "contorni" delle figure, e alla loro conformazione. Dal punto di vista della topologia, quindi figure che, ad un primo sguardo, appaiono molto diverse (e lo sono dal punto di vista della geometria euclidea), possono essere del tutto equivalenti. Consideriamo ad esempio le seguenti figure:

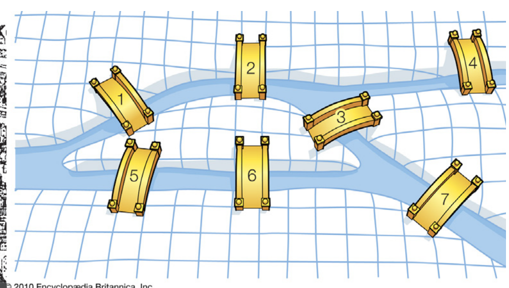


Pur essendo apparentemente molto diverse una dall'altra possiamo osservare che hanno in comune le seguenti caratteristiche:

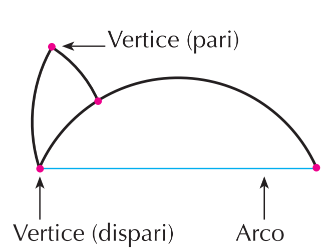
1. se partiamo da un punto e le percorriamo (ad esempio ripassandole con una matita) possiamo ritornare allo stesso punto con un solo percorso, ovvero senza intersecare alcuna linea;
2. non possiamo passare dallo spazio interno allo spazio esterno della figura senza intersecare almeno una volta il suo bordo;
3. la linea che la costituisce è continua; non presenta, cioè, interruzioni.

In conclusione possiamo affermare che due figure si dicono **topologicamente equivalenti** quando si possono ottenere per mezzo di una trasformazione topologica che mantiene invariate le proprietà di percorso, distinzione esterno/interno, continuità. Alla luce di queste proprietà analizziamo uno dei più famosi quesiti studiati dal grande matematico Eulero relativo al problema dei ponti della città di Königsberg. Questa città, che oggi si chiama Kalingrad, è situata alla confluenza di due fiumi, ed è strutturata in quattro settori, collegati fra di loro per mezzo di sette ponti, come illustrato in figura.
Essa è famosa perché divenne lo spunto per un celebre problema matematico. Sembra infatti che i cittadini, che avevano l'abitudine di passeggiare per le strade lungo i fiumi durante i giorni di festa, si fossero posti la domanda: «È possibile, partendo da un settore della città, tornarvi dopo aver percorso tutti e sette i ponti una e una sola volta?».

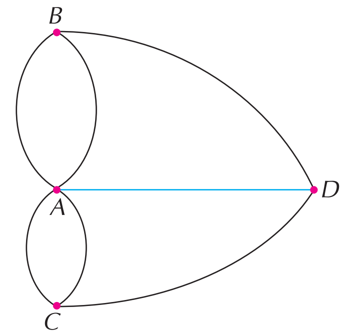




Questa domanda divenne un quesito logico-matematico vero e proprio, sul quale si concentrarono invano molti studiosi. A risolverlo fu il geniale matematico svizzero Eulero (1707-1783) il quale dimostrò che la risposta era: «No, non è possibile». Per giungere a tale risultato, egli dovette però elaborare tutta una nuova teoria matematica, che successivamente ebbe molto successo, detta **teoria dei grafi**. In questa teoria i percorsi vengono rappresentati da linee, dette **archi**, che si congiungono o si intrecciano in punti, detti **vertici**. Un vertice è **pari** se da esso esce un numero pari di archi, **dispari** in caso contrario. Un insieme di archi e vertici, che rappresenta in forma schematica un certo problema di percorso, viene detto **grafo** ovvero **rete topologica**.



Nella figura a lato è rappresentato, ad esempio, il grafo relativo al problema dei ponti di Königsberg.



I ragionamenti attraverso i quali Eulero elaborò le sue teorie sono troppo complessi per essere spiegati qui. Forniamo, tuttavia, le conclusioni fondamentali a cui giunse, conclusioni che prendono appunto il nome di **leggi di Eulero**.

1. In un grafo il numero dei vertici dispari è sempre pari.
2. Quando tutti i vertici di un grafo sono pari è possibile partire da un vertice e tornarvi percorrendo ogni arco una e una sola volta.
3. Quando un grafo è composto da due soli vertici dispari, allora è possibile percorrerlo interamente in un solo viaggio, ma senza tornare al punto di partenza.
4. Quando un grafo ha più di due vertici dispari, non è possibile percorrerlo in un solo viaggio. Occorre un numero di viaggi pari alla metà del numero di vertici dispari.

Sulla base di queste leggi è evidente che la risposta al problema di Königsberg è negativa. Il grafo presenta, infatti, ben quattro vertici dispari (*A* con cinque archi; *B*, *C* e *D* con tre).
La teoria dei grafi trova oggi moltissime applicazioni, specialmente nel settore dell'*urbanistica*, per quanto riguarda la regolamentazione dei flussi del traffico ed il tracciato delle strade, e in quello della produzione di elettrodomestici, dove viene utilizzata per organizzare al meglio i collegamenti interni dei circuiti elettrici ed elettronici.