Approfondimento

La teoria assiomatica

La definizione di probabilità può essere data in modo unico così da renderla indipendente dal tipo di esperimento aleatorio.

Dato uno spazio campionario Ω relativo ad un esperimento aleatorio, si dice probabilità p una funzione che ad ogni evento E associa un numero reale positivo o nullo tale che:

- **assioma 1:** $p(\Omega) = 1$(la probabilità dell'evento certo è 1)
- **assioma 2 (di additività finita):** per ogni coppia di eventi A e B fra loro disgiunti, cioè tali che $A \cap B = \varnothing$, si ha

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Da questi assiomi discende subito che la probabilità di un evento non certo è sempre minore di 1; infatti, poiché ciascun evento E è un sottoinsieme dello spazio campionario Ω, si ha che $p(E) < 1$.
L'assioma di additività finita ci dice poi che, per calcolare la probabilità dell'evento unione di due eventi incompatibili, basta sommare le relative probabilità.
Ad esempio, nell'estrazione dei numeri della tombola, sia A: «esce un numero maggiore di 50» e sia B: «esce un numero dispari minore di 10»; ci chiediamo quale sia la probabilità dell'evento unione.

Poiché $p(A) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$ e $p(B) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ e poiché i due eventi sono disgiunti, si ha subito che $p(A \cup B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

In effetti l'unione dei due eventi comprende 40 casi favorevoli all'evento A, 5 casi favorevoli all'evento B e quindi 45 casi favorevoli all'evento $A \cup B$, e $\frac{45}{90} = \frac{1}{2}$.

La definizione data comprende quindi in sè la definizione classica di probabilità.
In sostanza, questa definizione ci chiede di assegnare ad ogni evento elementare un valore di probabilità che sia compreso fra 0 e 1, in modo che la somma di tutte queste probabilità sia 1 e di valutare poi la probabilità di un evento composto come somma delle probabilità elementari.
Ad esempio, dato lo spazio $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ relativo al lancio di un dado non truccato, poiché possiamo supporre che ci sia equiprobabilità nell'uscita dei numeri, possiamo attribuire probabilità $\frac{1}{6}$ ad ogni evento elementare A_i così che la somma delle probabilità corrispondenti ai 6 eventi elementari dia proprio 1 (ciò, fra l'altro, è in accordo con il modello classico delle probabilità). In questo modo, la probabilità dell'evento $E = \{1, 3, 5\}$ (corrispondente alla proposizione «esce un numero dispari») può essere vista come la somma delle probabilità dei singoli eventi elementari:

$$p(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Osserviamo che anche quest'ultimo risultato è in accordo con la probabilità classica che considera la probabilità di questo evento come rapporto fra il numero dei casi favorevoli, 3, ed il numero dei casi possibili, 6.

In sostanza, questo significa che, per assegnare un valore di probabilità ad un evento, possiamo anche riferirci al modello che riteniamo più adatto fra quelli visti (classico, statistico, soggettivo) perché tutti soddisfano ai requisiti richiesti dalla teoria assiomatica.