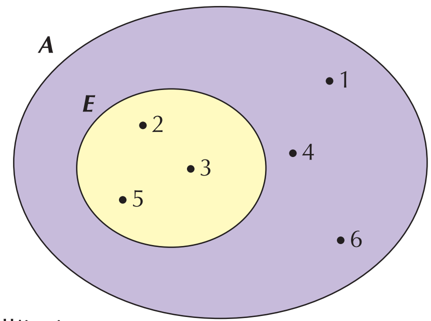
Probabilità e insiemi

Figura 1



Abbiamo studiato che la probabilità di un evento E si ottiene calcolando il rapporto fra i casi favorevoli all'evento e i casi possibili. Consideriamo il lancio di un dado e l'evento E: «esce un numero primo». Tutti i casi possibili, le sei facce del dado, possono essere considerati come gli elementi di un insieme che possiamo rappresentare per elencazione nella forma $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tale insieme viene chiamato **spazio campionario**.
Anche i casi favorevoli all'evento E formano un insieme $E = \{2; 3; 5\}$; in particolare essi costituiscono un sottoinsieme dello spazio campionario (***figura 1***) cioè $E \subset A$.
Comprendiamo facilmente che un evento impossibile sarà associato all'insieme vuoto, mentre un evento certo si può ricondurre all'insieme A stesso.

Riprendiamo ora il teorema della probabilità totale alla luce delle conoscenze sugli insiemi. Consideriamo dunque un'urna che contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Estraendo a caso una pallina, calcoliamo la probabilità che essa sia:

a. un multiplo di 5 oppure un multiplo di 7;
b. un multiplo di 3 oppure un divisore di 15;
c. un numero che non sia un multiplo di 5.

Soluzione

a. Lo spazio campionario è l'insieme $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.

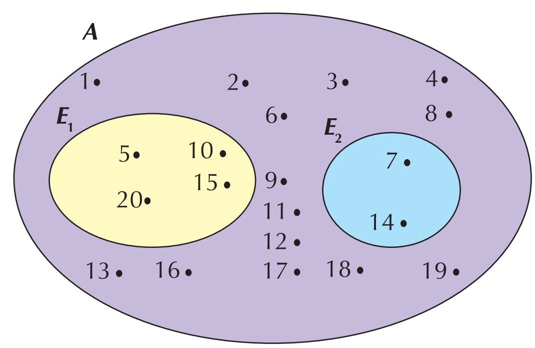
Rappresentiamo per elencazione gli elementi dei sottoinsiemi collegati agli eventi E_1: «esce un multiplo di 5» e E_2: «esce un multiplo di 7»:

$$E_1 = \{5; 10; 15; 20\} \qquad E_2 = \{7; 14\}$$

Osserviamo che, essendo i due eventi incompatibili, i rispettivi sottoinsiemi sono disgiunti (***figura 2***) e la probabilità richiesta coincide con la probabilità della loro unione:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} = \frac{3}{10}.$$

Figura 2



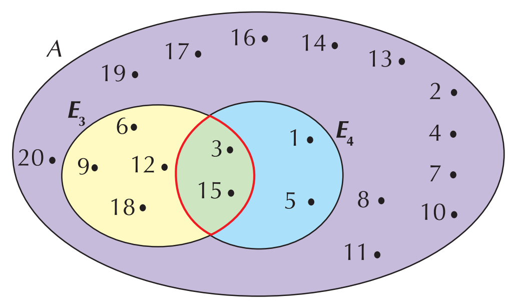
b. Nel secondo caso lo spazio campionario è ovviamente lo stesso. Gli eventi E_3: «esce un multiplo di 3» e E_4: «esce un divisore di 15» definiscono i due sottoinsiemi:

$$E_3 = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\} \qquad E_4 = \{1; 3; 5; 15\}$$

Questa volta gli eventi sono compatibili e ciò è evidenziato dal fatto che i due sottoinsiemi presentano degli elementi comuni $E_3 \cap E_4 = \{3; 15\}$.

Osservando la ***figura 3*** notiamo che il numero dei casi favorevoli si ottiene togliendo alla somma degli elementi dei due sottoinsiemi il numero degli elementi dell'inter-

Figura 3



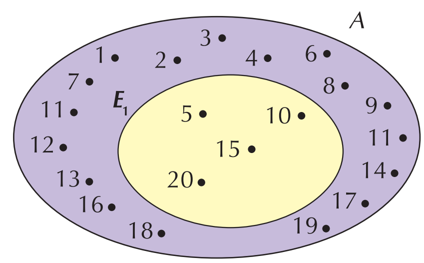
sezione, pertanto dovremo usare la formula: $p(E_3 \cup E_4) = p(E_3) + p(E_4) - p(E_3 \cap E_4)$

Sostituendo i valori numerici otteniamo: $p(E_3 \cup E_4) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{4}{20} - \dfrac{2}{20} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$.

c. Nel terzo caso possiamo considerare tale evento come l'inverso dell'evento E_1: «esce un multiplo di 5». Il sottoinsieme che rappresenta i casi favorevoli all'evento in questione è il complementare di E_1 rispetto all'insieme A (in viola nella ***figura 4***):

$p(\text{non } E_1) = 1 - p(E_1) = 1 - \dfrac{4}{20} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$.

Figura 4



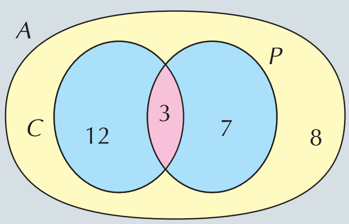
ESERCIZI

1 **ESERCIZIO GUIDA**

In un gruppo di 30 amici, 15 giocano a calcio, 10 giocano a pallavolo e 3 praticano entrambi gli sport. Rappresenta questa situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn e calcola la probabilità che un amico scelto a caso:

a. giochi a calcio; **b.** non giochi a pallavolo; **c.** non pratichi sport.

Rappresentiamo la situazione descritta con un diagramma chiamando A lo spazio campionario (insieme di tutti gli amici del gruppo), C l'insieme degli amici che giocano a calcio e P l'insieme di quelli che giocano a pallavolo e segnalando all'interno degli insiemi il numero degli elementi che contengono.



a. $p(C) = \dfrac{\ldots\ldots}{30} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

b. $p(\textit{non } P) = 1 - \dfrac{\ldots\ldots}{30} = 1 - \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

c. $p(\textit{non } C \cup P) = 1 - p(C \cup P) = 1 - [p(C) + p(P) - p(C \cap P)] = 1 - \left(\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} - \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\right) = 1 - \dfrac{22}{30} = \dfrac{4}{15}$

È molto più semplice, dopo aver rappresentato la situazione, osservare che il numero di alunni che non pratica i due sport è 8 e che quindi questo è il numero dei casi a noi favorevoli.

2 In un gruppo di 24 ragazzi, 15 ascoltano la musica rock, 5 ascoltano la musica classica e 2 ascoltano tutti e due i tipi di musica. Rappresenta questa situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn e calcola la probabilità che un ragazzo scelto a caso:

a. ascolti la musica classica;

b. non ascolti la musica rock;

c. non ascolti musica rock o classica.

3 Gli alunni che frequentano la II A sono 30; di questi 10 giocano a calcio, 8 a tennis e 4 ad entrambi gli sport. Se l'insegnante di Scienze motorie, prima di conoscere gli sport praticati da ciascun alunno ne chiama uno a caso, qual è probabilità che questo alunno pratichi almeno una delle due attività considerate? $\left[\frac{7}{15}\right]$

4 In una classe di 24 alunni, 15 preferiscono l'italiano, 8 la matematica e 2 di questi preferiscono entrambe queste discipline. Rappresenta questa situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn e calcola la probabilità che un alunno scelto a caso:

a. preferisca matematica; $\left[\frac{1}{3}\right]$

b. non ami la matematica; $\left[\frac{2}{3}\right]$

c. non ami particolarmente nessuna delle due materie citate. $\left[\frac{1}{8}\right]$

5 In un gruppo di 10 amici, 3 trascorreranno le vacanze estive in montagna e 6 al mare. Se due di questi amici trascorreranno le vacanze a casa, quanti sono quelli che andranno sia al mare che in montagna? Rappresenta questa situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn e calcola la probabilità che un amico scelto a caso:

a. vada in montagna; $\left[\frac{3}{10}\right]$

b. vada sia al mare che in montagna; $\left[\frac{1}{10}\right]$

c. non vada al mare. $\left[\frac{2}{5}\right]$

6 In una classe di 28 alunni 15 non sono mai stati all'estero, 10 sono stati in Spagna, 8 in Francia e 4 in Gran Bretagna. Rappresenta la situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn sapendo che 6 sono stati sia in Spagna che in Francia e nessuno è stato sia in Francia che in Gran Bretagna. Quanti alunni hanno visitato due stati esteri sapendo che nessuno ne ha visitati più di due? [9]

Calcola la probabilità che un alunno scelto a caso:

a. abbia visitato la Spagna; $\left[\frac{5}{14}\right]$

b. non abbia visitato la Gran Bretagna; $\left[\frac{6}{7}\right]$

c. abbia visitato sia la Spagna che la Gran Bretagna. $\left[\frac{3}{28}\right]$

7 In una classe di 20 alunni, 5 hanno lo scooter, 10 hanno il cellulare e 2 li hanno entrambi. Rappresenta questa situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn e calcola la probabilità che scegliendo a caso un alunno:

a. abbia lo scooter; $\left[\frac{1}{4}\right]$

b. non abbia il cellulare; $\left[\frac{1}{2}\right]$

c. abbia sia il cellulare che lo scooter; $\left[\frac{1}{10}\right]$

d. non abbia né lo scooter né il cellulare. $\left[\frac{7}{20}\right]$