Concetti chiave e regole

Il modello di un problema di PL

In ogni problema di programmazione lineare vi è una funzione obiettivo da ottimizzare, cioè rendere massima o minima, le cui variabili sono soggette a vincoli rappresentati da equazioni o disequazioni:

funzione obiettivo $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

sistema dei vincoli
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,........,n \end{cases}$$

vincoli tecnici

vincoli di segno

Il metodo grafico per un problema in due variabili

La risoluzione grafica di un problema di PL consiste nel rappresentare nel piano cartesiano il sistema dei vincoli; individuata la regione di tali vincoli, rappresentata normalmente da un poligono, si valuta la funzione obiettivo nei vertici del poligono e si assume come soluzione quella che rende ottima la funzione obiettivo stessa.

Il simplesso

Mediante l'introduzione di **variabili slack** è sempre possibile scrivere il sistema dei vincoli, esclusi quelli di segno, sotto forma di sole equazioni; in questo caso il modello del problema si esprime in *forma standard* nel modo che segue:

ottimizzare $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + ... + c_nx_n$ con $c_i = 0$ se $i > 2$

con i vincoli
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

In un tale problema, si chiama:

- **soluzione di base** la soluzione del sistema dei vincoli che si ottiene ponendo uguale a zero n variabili a caso e trovando il corrispondente valore delle altre
- **soluzione di base ammissibile** ogni soluzione di base che soddisfa i vincoli di segno.

La procedura di risoluzione consiste nei seguenti passi:

1. Si individua una prima soluzione di base ammissibile e si valuta la funzione obiettivo in tale punto.
2. Si scrive il sistema dei vincoli in funzione di tale base.
3. Si ricerca una nuova soluzione di base ammissibile mediante l'individuazione della variabile entrante nella nuova base e di quella uscente dalla vecchia.
4. Si determina la nuova soluzione di base ammissibile.
5. Si valuta la funzione obiettivo.

I passi da 2 a 5 devono essere ripetuti fino a che la soluzione trovata è quella ottimale.

Il problema del trasporto

Il modello algebrico di un problema di trasporto è formato:

- da una funzione di costo da minimizzare
- da una serie di vincoli che limitano le capacità produttive delle fabbriche e ricettive dei magazzini
- da una serie di vincoli di segno sulle variabili che rappresentano le quantità prodotte e stoccate.

Un problema di questo tipo può essere risolto con il metodo del simplesso o, in alternativa, con un metodo che prevede di trovare:

- una prima possibile soluzione mediante la *saturazione* della tabella dei costi
- una eventuale soluzione migliore mediante il metodo dello *stepping stone*.