APPROFONDIMENTO

I grafici derivati e la periodicità

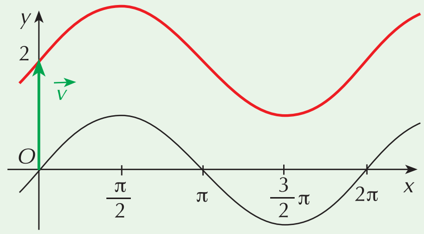
A partire dai grafici delle funzioni goniometriche fondamentali possiamo costruire quello di altre funzioni applicando opportune isometrie. Di seguito vediamo alcuni esempi.

Primo esempio

Rappresentiamo il grafico di $y = \sin x + 2$.

Questa funzione è la corrispondente di $y = \sin x$ nella traslazione di vettore $\vec{v} = (0, 2)$.

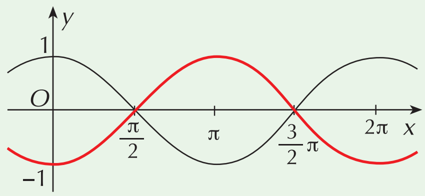
Per ottenere il suo grafico basta "spostare" di 2 unità verso l'alto quello della funzione base $y = \sin x$.



Secondo esempio

Costruiamo il grafico della funzione di equazione $y = -\cos x$.

Il grafico di questa funzione si ottiene dalla funzione base $y = \cos x$ (in nero in figura) mediante una simmetria rispetto all'asse x (grafico in rosso).

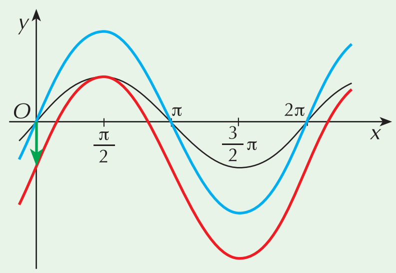


Terzo esempio

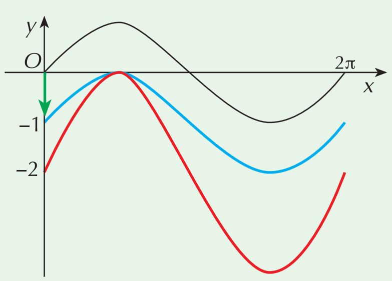
Rappresentiamo il grafico di $y = 2\sin x - 1$.

Dopo aver disegnato la funzione base $y = \sin x$ (in nero nella figura), operiamo le seguenti trasformazioni:

- dilatazione di fattore 2 lungo l'asse delle ordinate per avere $2 \sin x$; in pratica basta raddoppiare le ordinate del grafico base (grafico in blu)
- traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$ sul grafico precedente per avere $2 \sin x - 1$ (grafico in rosso).



Attenzione all'ordine di applicazione delle trasformazioni (segui la figura): se sulla curva base (grafico in nero) si esegue prima la traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$ (grafico in azzurro) quindi la dilatazione lungo le ordinate di fattore 2 (curva in rosso), si ottiene un grafico diverso che non corrisponde a quello richiesto ma a quello della funzione $y = 2(\sin x - 1)$.



Per individuare l'esatto ordine di applicazione delle diverse trasformazioni devi seguire l'ordine delle operazioni; nel caso della nostra funzione: dato x, prima si calcola $\sin x$ (funzione base), poi si calcola $2 \sin x$ (dilatazione di fattore 2), poi si calcola $2 \sin x - 1$ (traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$).

La periodicità delle funzioni goniometriche

Si dice che una funzione $f(x)$ è **periodica di periodo** S se S è il più piccolo numero per il quale si verifica che

$$f(x + kS) = f(x) \qquad \text{con } k \in Z$$

Le funzioni goniometriche fondamentali seno e coseno sono periodiche di periodo 2π perché sappiamo che $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, mentre la funzione tangente è periodica di periodo π perché $\tan(x + k\pi) = \tan x$.
Applicando una dilatazione di fattore h lungo l'asse x, anche il periodo della funzione subisce la stessa dilatazione; di conseguenza possiamo dire che:

- le funzioni $\sin hx$ e $\cos hx$ sono periodiche di periodo $\dfrac{2\pi}{h}$
- la funzione $\tan hx$ è periodica di periodo $\dfrac{\pi}{h}$

Esempio

- La funzione $y = \sin \dfrac{3}{4}x$, essendo $h = \dfrac{3}{4}$, è periodica di periodo $2\pi \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}\pi$
- La funzione $y = \tan 5x$, essendo $h = 5$, è periodica di periodo $\dfrac{\pi}{5}$
- La funzione $y = \cos \pi x$, essendo $h = \pi$, è periodica di periodo $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

Esercizi

1 Per tracciare il grafico della funzione $y = \sin 3x + 1$ a partire da quello di $\sin x$, devi operare nell'ordine:

a. una dilatazione di fattore $\dfrac{1}{3}$ lungo l'asse delle ascisse e poi una traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$

b. una dilatazione di rapporto $\dfrac{1}{3}$ lungo l'asse delle ascisse e poi una traslazione di vettore $\vec{v} = (0, 1)$

c. una dilatazione di rapporto 3 lungo l'asse delle ascisse e poi una traslazione di vettore $\vec{v} = (0, 1)$

d. una dilatazione di rapporto 3 lungo l'asse delle ordinate e poi una traslazione di vettore $\vec{v} = (0, 1)$.

2 Se alla funzione $y = \cos x$ applichiamo una traslazione di vettore $\vec{v} = (1, 0)$ otteniamo la funzione di equazione:

a. $y = \cos x + 1$ **b.** $y = \cos(x + 1)$ **c.** $y = \cos(x - 1)$ **d.** $y = \cos x - 1$

3 Alla funzione $y = \sin x$ vengono applicate una dilatazione di fattore 2 lungo l'asse x e una traslazione di vettore $\vec{v} = (0, -1)$; in questo modo si ottiene la funzione:

a. $y = \sin 2x - 1$ **b.** $y = \sin \dfrac{x}{2} - 1$ **c.** $y = \sin 2x + 1$ **d.** $y = \sin \dfrac{x - 1}{2}$

4 Indica quali trasformazioni occorre applicare per costruire il grafico delle seguenti funzioni a partire dalle funzioni goniometriche fondamentali:

a. $y = \sin x - 2$ **b.** $y = 3 \cos x$ **c.** $y = \cos \dfrac{x}{3}$ **d.** $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

N.B.: Puoi controllare con GeoGebra di avere costruito correttamente i grafici richiesti.

Mediante l'applicazione di opportune traslazioni, costruisci i grafici delle seguenti funzioni.

5 $y = \sin x - 1$

6 $y = \cos x + 2$

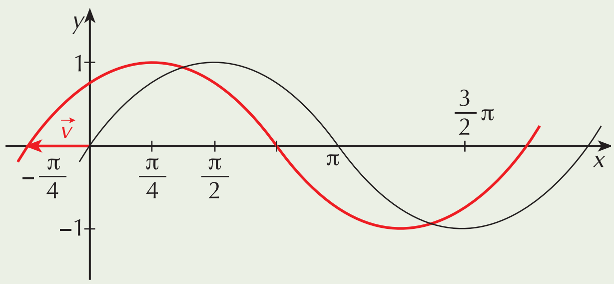
7 $y - 3 = \sin x$

8 $y + 1 = \cos x$

9 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

La funzione $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (funzione trasformata) si ottiene dalla $y = \sin x$ (funzione di base) mediante una traslazione di vettore $\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.



I grafici della funzione base (in nero) e di quella trasformata (in rosso) sono riportati in figura.

10 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

11 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

12 $y = \tan x - 1$

13 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

14 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

15 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

16 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

17 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$

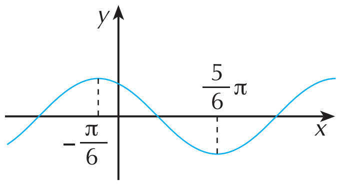
18 $y = 3 + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

19 $y = \frac{1}{2} + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

20 Il grafico in figura rappresenta la funzione:

a. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ **b.** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ **d.** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$



Mediante l'applicazione di opportune simmetrie, costruisci i grafici delle seguenti funzioni.

21 $y = -\sin x$

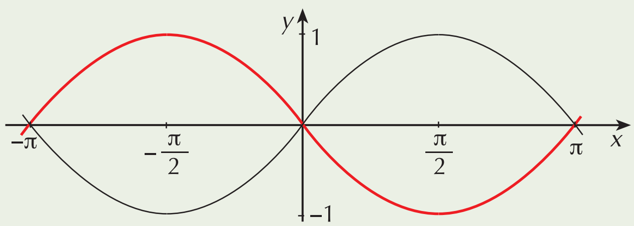
22 $y = -\tan x$

23 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = \sin(-x)$

La funzione $y = \sin(-x)$ (funzione trasformata) si ottiene dalla $y = \sin x$ (funzione di base) con le sostituzioni

$$\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}.$$



Si tratta, pertanto, di una simmetria rispetto all'asse y.

24 $y = \cos(-x)$

25 $y = \tan(-x)$

26 $y = -\sin(-x)$

27 $y = -\cos(-x)$

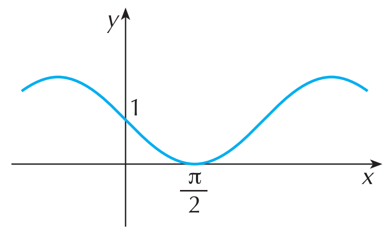
28 $y = \sin(-x) + \frac{1}{3}$

29 $y = -\tan(-x) + \frac{1}{2}$

30 Il grafico in figura rappresenta la funzione

a. $y = 1 - \cos x$ **b.** $y = 1 - \sin x$

c. $y = \sin x + 1$ **b.** $y = 1 + \cos x$



Mediante l'applicazione di opportune dilatazioni, costruisci i grafici delle seguenti funzioni.

31 $y = 2\sin x$

32 $y = \frac{1}{2}\sin x$

33 $y = 3\cos x$

34 $y = \tan \frac{x}{2}$

35 $y = \sin 2x$

36 $y = \cos 3x$

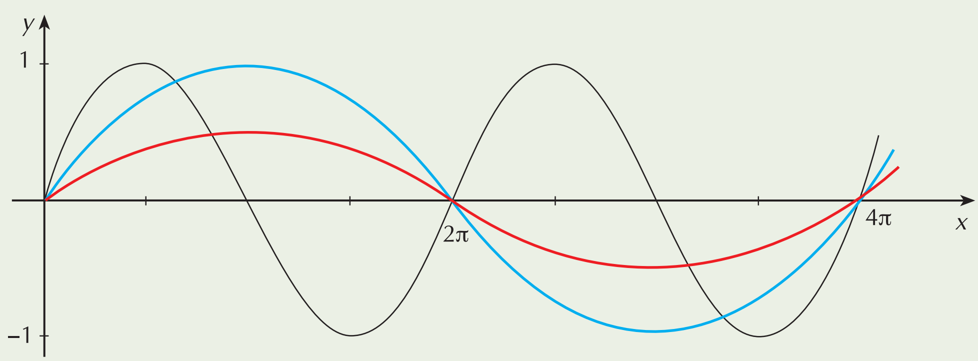
37 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$

Costruiamo per passaggi successivi il grafico richiesto; nella figura di pagina seguente abbiamo disegnato in successione:

- la funzione base $y = \sin x$ (in nero)
- $y = \sin \frac{x}{2}$ (in azzurro) con una dilatazione di coefficiente 2 delle ascisse (il periodo diventa 4π)
- $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$ (in rosso) con una dilatazione di coefficiente $\frac{1}{2}$ delle ordinate.

La curva che ne risulta è quella in rosso.



38 $y = 3\cos 2x$

39 $y = 2\tan \frac{x}{2}$

40 $y = 2\sin \frac{x}{3}$

41 $y = 3\cos 4x$

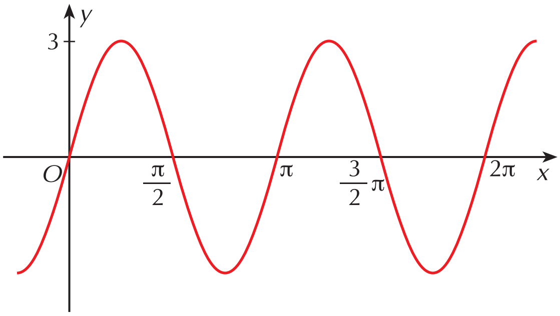
42 A quale funzione corrisponde il grafico nella figura a lato?

a. $y = 3\cos\dfrac{x}{2}$

b. $y = 3\sin\dfrac{x}{2}$

c. $y = 3\cos 2x$

d. $y = 3\sin 2x$



La periodicità delle funzioni goniometriche

43 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = \sin 4x$

La funzione data è la trasformata di $y = \sin x$ (che ha periodo 2π) mediante una dilatazione di fattore $k = \dfrac{1}{4}$ lungo l'asse x; il periodo subisce la stessa trasformazione: $\dfrac{1}{4}(2\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

44 $y = \sin\dfrac{1}{4}x$ $\qquad y = 2\cos\dfrac{3}{4}x$ $\qquad \left[8\pi;\ \dfrac{8}{3}\pi\right]$

45 $y = \sin 2\pi x$ $\qquad y = \tan 4x$ $\qquad \left[1;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$

46 $y = 3\sin\dfrac{1}{2}x + 1$ $\qquad y = -4\cos 2x + 3$ $\qquad [4\pi;\ \pi]$

Risultati di alcuni esercizi.

1 b. **2 c.** **3 b.**

4 a. $\vec{v} = (0, -2)$; **b.** dilatazione di fattore 3 lungo l'asse y; **c.** dilatazione di fattore 3 lungo l'asse x; **d.** $\vec{v} = \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

20 d. **30 b.** **42 d.**