Approfondimento

Il teorema di Rolle e la sua dimostrazione

Teorema di Rolle. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ che abbia le seguenti caratteristiche:

a. sia continua in $[a, b]$

b. sia derivabile in ogni punto interno di tale intervallo

c. assuma valori uguali agli estremi di questo intervallo, cioè sia $f(a) = f(b)$.

Allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo (a, b) nel quale la sua derivata si annulla, in cui cioè si ha che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione.

Il teorema di Weierstrass ci assicura che la funzione assume in $[a, b]$ il suo valore massimo M ed il suo valore minimo m. Allora esistono due punti c e d appartenenti ad $[a, b]$ tali che $M = f(c)$ e $m = f(d)$; inoltre ogni altro valore assunto dalla funzione al variare di x in $[a, b]$ è compreso fra questi due, cioè $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Premesso questo, distinguiamo il caso in cui è $m = M$ da quello in cui è $m < M$.

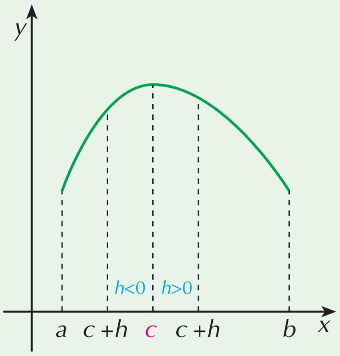
I caso.

Se $m = M$ la funzione è costante in tutto l'intervallo, ed ha derivata nulla in tutti i suoi punti; quindi anche in un punto c particolare. Il teorema è, in questo caso, dimostrato.

II caso.

Se $m < M$, poiché per ipotesi la funzione assume valori uguali agli estremi, essa deve assumere o il valore minimo o il valore massimo in un punto interno all'intervallo $[a, b]$. Supponiamo che sia il punto c, cioè quello in cui assume valore massimo, ad essere interno.

Allora poiché in un punto di massimo la funzione assume il suo valore più grande, deve essere vero che $f(c+h) \leq f(c)$ (***figura a lato***); devono allora valere anche le seguenti disuguaglianze



$$\begin{aligned} &\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \qquad \text{se } h > 0 \\ &\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \qquad \text{se } h < 0 \end{aligned} \qquad (\mathbf{A})$$

L'espressione al primo membro di tali disuguaglianze è il rapporto incrementale della funzione relativo al punto $x = c$, rispettivamente dalla destra e dalla sinistra.

Poiché per ipotesi f è una funzione derivabile in (a, b), esistono finiti ed uguali i limiti dei rapporti incrementali per $h \to 0$ ed è

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

Le relazioni (**A**) ci dicono che la derivata nel punto c è contemporaneamente negativa o nulla e positiva o nulla; questo significa che essa deve valere zero, cioè deve essere $f'(c) = 0$.

Se invece è il punto d, in cui la funzione assume valore minimo, ad essere interno all'intervallo $[a, b]$, si procede ad un analogo ragionamento e si arriva alle stesse conclusioni. ◀

Il teorema di Lagrange e la sua dimostrazione

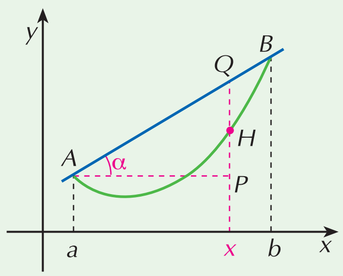
Teorema. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ che abbia le seguenti caratteristiche:
a. sia continua in $[a, b]$
b. sia derivabile in ogni punto interno di tale intervallo
allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo (a, b) tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Dimostrazione.
Consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$

Anche se ciò non è indispensabile ai fini della dimostrazione, cerchiamo di capire che cosa rappresenta la funzione $\varphi(x)$: indicati con $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ i punti della curva in corrispondenza degli estremi dell'intervallo $[a, b]$, il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta AB.

Il termine $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ rappresenta allora la quantità $\overline{AP}\tan\alpha$, cioè la misura del segmento PQ (***figura a lato***); se a tale segmento aggiungiamo $f(a)$, otteniamo l'ordinata del punto Q sulla corda AB. In definitiva, la parte racchiusa fra parentesi quadre nell'espressione di $\varphi(x)$ è l'ordinata del punto Q.
In ogni punto $x \in (a, b)$, $\varphi(x)$ indica allora la differenza fra l'ordinata del punto H, appartenente alla funzione (cioè $f(x)$) e l'ordinata del corrispondente punto sulla corda (cioè la parte in parentesi quadra).
Veniamo ora alla dimostrazione.



Osserviamo che la funzione φ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Infatti:

- essendo la differenza di due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b), anch'essa è continua e derivabile in tali intervalli;
- assume valori uguali agli estremi:
  - $\varphi(a)=f(a)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)+f(a)\right]=0$
  - $\varphi(b)=f(b)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a)\right]=0$

Esiste allora in (a, b) almeno un punto c in cui è $\varphi'(c)=0$.

Calcoliamo la derivata della funzione φ: $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

allora $\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ed è $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

Quest'ultima relazione ci dice che $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ◀