Concetti chiave e regole

Modelli e algoritmi

Un modello è una rappresentazione schematica e semplificata della realtà che mette in evidenza solo ciò che è importante ai fini della risoluzione di un problema.
Il processo risolutivo prevede la costruzione di un **algoritmo**, nel quale vengono indicate, in modo dettagliato e puntuale, tutte le operazioni che devono essere eseguite per raggiungere l'obiettivo.

La struttura di un algoritmo

Le istruzioni fondamentali per scrivere un algoritmo in linguaggio di pseudocodifica sono:

- l'istruzione di lettura per l'acquisizione del valore di un dato: leggi (dato)
- l'istruzione di scrittura per la comunicazione del valore di un dato: scrivi (dato)
- l'istruzione di assegnamento per assegnare un valore o un'espressione a una variabile: A = "espressione"

Le strutture di controllo

Qualunque algoritmo può essere costruito usando le seguenti strutture di controllo:

- la **sequenza** che indica le istruzioni da eseguire nell'ordine in cui sono indicate
- la **selezione** che permette di scegliere tra due alternative possibili a seconda che si verifichi o meno una certa condizione
- l'**iterazione** che permette di eseguire più volte un determinato gruppo di istruzioni.

Condizioni di esistenza delle radici di un'equazione

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e se $f(a) \cdot f(b) < 0$, l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione reale in (a, b).
Se invece $f(a) \cdot f(b) > 0$ non si può dire che non ci sono soluzioni, ma la loro esistenza non è più certa.

Unicità delle radici

Si dice che **si separano le radici di un'equazione** quando si individua un intervallo che contiene una sola soluzione reale.
Per essere sicuri che in (a, b) l'equazione $f(x) = 0$ abbia una sola soluzione, si possono usare due metodi; supposto che $f(x)$ sia una funzione continua in $[a, b]$ e che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora la soluzione è unica se:

- $f(x)$ è derivabile in (a, b) e $f'(x)$ non si annulla mai in tale intervallo
- $f(x)$ è derivabile due volte in (a, b) e $f''(x)$ è sempre positiva o sempre negativa in tale intervallo.

I metodi di risoluzione approssimata

Una volta accertato che in (a, b) l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione reale r, per trovare un suo valore approssimato si possono seguire diversi metodi.

Metodo di bisezione

- si divide (a, b) in due parti uguali considerando il punto medio $\dfrac{a+b}{2}$
- si calcola $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

- se $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, allora la soluzione r appartiene all'intervallo $\left(a,\ \frac{a+b}{2}\right)$, altrimenti appartiene all'intervallo $\left(\frac{a+b}{2},\ b\right)$

Si ripete il procedimento sul nuovo intervallo fino ad ottenere la precisione desiderata.

Metodo delle corde

Le successive approssimazioni c_n della soluzione nell'intervallo (a, b) sono generate dalla formula:

$$c_n = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1}) \cdot (b - c_{n-1})}{f(b) - f(c_{n-1})} \qquad \text{oppure} \qquad c_n = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1}) \cdot (a - c_{n-1})}{f(a) - f(c_{n-1})}$$

dove il primo valore c_0:

- coincide con a se $f''(x)$ e $f(a)$ hanno segni opposti $\forall x \in (a, b)$ (prima formula)
- coincide con b se $f''(x)$ e $f(a)$ hanno lo stesso segno $\forall x \in (a, b)$ (seconda formula)

Metodo delle tangenti

Allo stesso modo, le approssimazioni d_n della soluzione nell'intervallo (a, b) sono generate dalla formula:

$$d_n = d_{n-1} - \frac{f(d_{n-1})}{f'(d_{n-1})}$$

dove il primo valore d_0:

- coincide con a se $f''(x)$ e $f(a)$ hanno lo stesso segno $\forall x \in (a, b)$
- coincide con b se $f''(x)$ e $f(a)$ hanno segni opposti $\forall x \in (a, b)$