Collegamenti

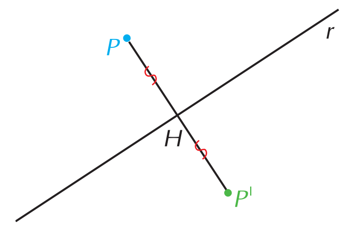
Il piano cartesiano e le isometrie

Sappiamo che un'isometria è una trasformazione geometrica che ad ogni segmento di un piano ne associa un altro congruente al primo. Fra tutte le isometrie, quelle che ora ci interessano più da vicino sono le simmetrie e le traslazioni.

Trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano; essa è definita mediante una legge che indica come associare le coppie di punti. Trattandosi di una corrispondenza biunivoca, ogni trasformazione geometrica è una funzione del piano in sé.

Le simmetrie assiali

Data una retta r, la simmetria assiale di asse r è la funzione che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' in modo che r sia l'asse del segmento PP'; del punto P' si dice che è il simmetrico di P.
In pratica, per trovare il simmetrico di un punto P rispetto a r si traccia da P la perpendicolare a r che la incontra in H e si prende su di essa, da parte opposta rispetto a r, il punto P' in modo che sia $PH \cong P'H$.
Nel piano cartesiano sono significative le simmetrie rispetto agli assi cartesiani.
Dato un punto $P(x, y)$:



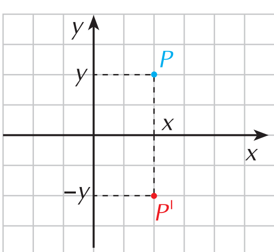
- il suo **simmetrico rispetto all'asse** x è il punto P' che ha la stessa ascissa di P ma ordinata opposta:

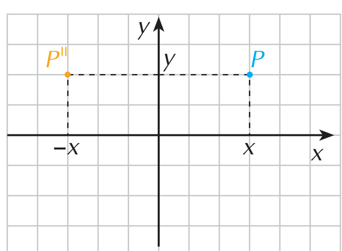
$$\boxed{P(x,\ y) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P'(x,\ -y)}}$$

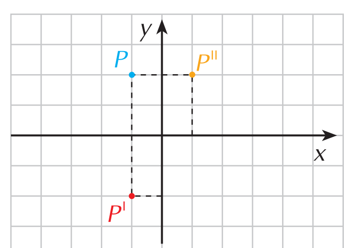
- il suo **simmetrico rispetto all'asse** y è il punto P'' che ha la stessa ordinata di P ma ascissa opposta:

$$\boxed{P(x,\ y) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P''(-x,\ y)}}$$

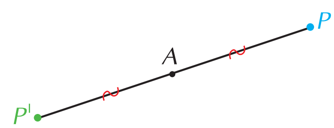
Per esempio, i simmetrici del punto $P(-1,\ 2)$ rispetto ai due assi sono: $P'(-1,\ -2)$ rispetto all'asse x, $P''(1,\ 2)$ rispetto all'asse y.





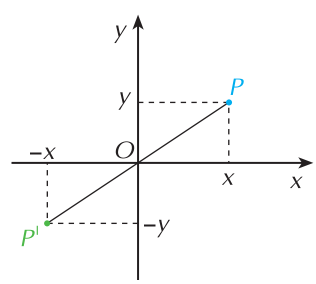


Le simmetrie centrali

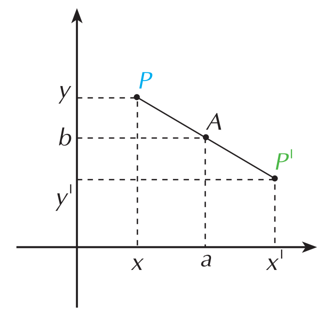


Dato un punto A, la simmetria centrale di centro A è la funzione che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' in modo che A sia il punto medio del segmento PP'. In pratica, per trovare il simmetrico di un punto P rispetto al centro A si traccia da P la semiretta PA e si prende su di essa, da parte opposta rispetto a A, il punto P' in modo che sia $PA \cong P'A$.
Particolarmente semplice nel piano cartesiano è la **simmetria rispetto all'origine** $\boldsymbol{O}$; dato un punto $P(x,\ y)$, il suo simmetrico rispetto ad O è il punto P' che ha ascissa e ordinata opposte rispetto a P:

$$\boxed{P(x,\ y) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P'(-x,\ -y)}}$$



È facile anche calcolare il simmetrico di $P(x, y)$ rispetto ad un punto qualsiasi $A(a, b)$ se teniamo presente che A è il punto medio di PP'; se (x', y') sono le coordinate di P' si ha che:



$$\frac{x+x'}{2}=a \quad \rightarrow \quad x'=2a-x \quad \text{e} \quad \frac{y+y'}{2}=b \quad \rightarrow \quad y'=2b-y$$

$$\boxed{P(x, y) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P'(2a-x, 2b-y)}}$$

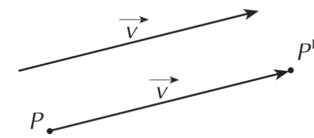
Per esempio, dato il punto $P(5, -4)$:

- il suo simmetrico rispetto all'origine è il punto $P'(-5, 4)$
- il suo simmetrico rispetto ad $A(-1, 2)$ ha coordinate:

$$x'=2(-1)-5=-7 \qquad y'=2\cdot 2-(-4)=8 \quad \rightarrow \quad P'(-7, 8)$$

La traslazione

Dato un segmento orientato $\vec{v}$, la traslazione è la funzione che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' in modo che il segmento $\vec{v}$ abbia il primo estremo in P ed il secondo in P'. Un segmento orientato del piano si chiama anche **vettore**.



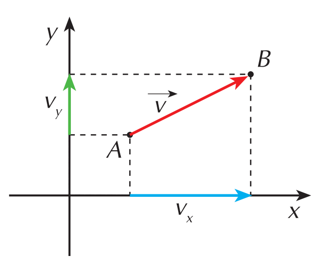
Nel piano cartesiano, un vettore $\vec{v}$ è individuato dai segmenti che ne sono la proiezione lungo gli assi cartesiani e che ne rappresentano le componenti. Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ sono rispettivamente il primo e il secondo estremo del vettore, le misure v_x e v_y di tali componenti sono date da:

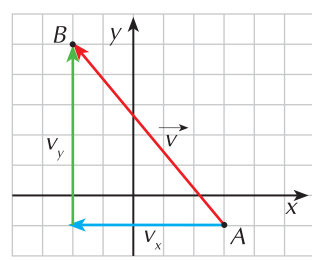
Nel calcolo di v_x e v_y è importante l'ordine in cui vengono presi i punti:

secondo estremo − primo estremo

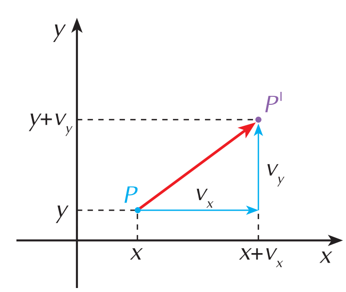
$$v_x = x_2 - x_1 \qquad \text{e} \qquad v_y = y_2 - y_1 \qquad \text{e si scrive} \qquad \vec{v}=(v_x, v_y).$$

Le componenti cartesiane di un vettore sono quindi numeri positivi se sono orientate come gli assi cartesiani, sono numeri negativi se sono orientate in verso opposto. Per esempio, il vettore $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ con $A(3, -1)$ e $B(-2, 5)$ ha componenti $v_x=-2-3=-5$ e $v_y=5+1=6$ e scriviamo $\vec{v}=(-5, 6)$.





Dato dunque un vettore $\vec{v}$ di componenti (v_x, v_y) ed un punto $P(x, y)$ del piano, le coordinate del punto P' ad esso corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}$ si ottengono aggiungendo v_x e v_y rispettivamente alla sua ascissa e alla sua ordinata:



$$\boxed{P(x, y) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P'(x+v_x, y+v_y)}}$$

Per esempio, considerando ancora il vettore $\vec{v}=(-5, 6)$, il punto P' che corrisponde a $P(1, -4)$ ha coordinate:

ascissa: $1-5=-4$ $\qquad$ ordinata: $-4+6=2$ $\quad \rightarrow \quad$ $P'(-4, 2)$

ESEMPI

1 Dato il triangolo ABC di vertici $A(2, 3)$, $B(-2, 0)$, $C(3, -1)$, troviamo le coordinate dei vertici del triangolo $A'B'C'$ corrispondente del triangolo ABC nella simmetria:

a. rispetto all'asse x

b. rispetto all'asse y

c. rispetto all'origine degli assi

a. I punti A', B', C' hanno la stessa ascissa dei punti A, B, C ma ordinate opposte; quindi

$A'(2, -3)$ $\quad$ $B'(-2, 0)$ $\quad$ $C'(3, 1)$.

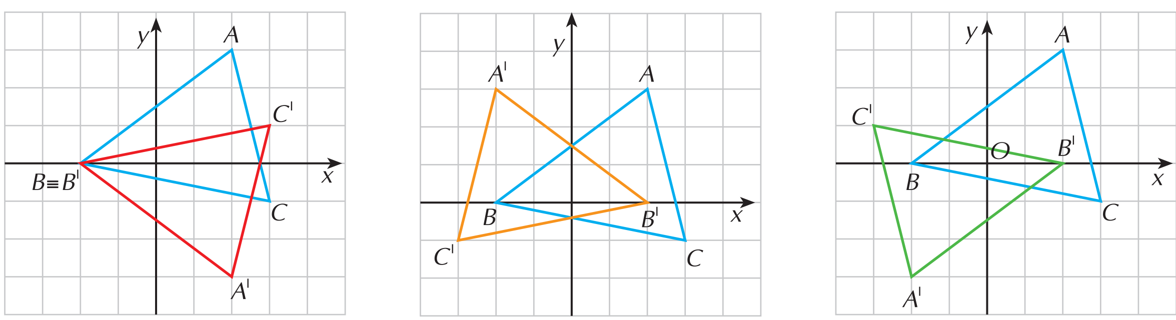
Poiché B coincide con B', si tratta di un **punto unito** (ricorda che i punti uniti sono quelli che hanno per trasformati se stessi).

b. I punti A', B', C' hanno la stessa ordinata dei punti A, B, C ma ascisse opposte; quindi

$A'(-2, 3)$ $\quad$ $B'(2, 0)$ $\quad$ $C'(-3, -1)$

c. I punti A', B', C' hanno ascisse ed ordinate opposte a quelle di A, B, C; quindi

$A'(-2, -3)$ $\quad$ $B'(2, 0)$ $\quad$ $C'(-3, 1)$

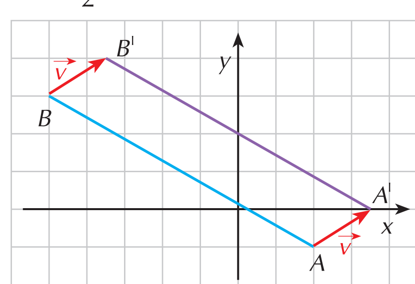


2 Dato il segmento di estremi $A(2, -1)$ e $B(-5, 3)$, troviamo il suo corrispondente $A'B'$ nella traslazione di vettore $\vec{v} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

Le coordinate dei punti A' e B' si ottengono da quelle di A e B aggiungendo $\frac{3}{2}$ alle ascisse e 1 alle ordinate. Risolvendo i due sistemi:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \\ y_{A'} = -1 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B'} = -5 + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \\ y_{B'} = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

si ottengono i punti: $A'\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ e $B'\left(-\frac{7}{2}, 4\right)$



Approfondimenti: Il piano cartesiano e le isometrie

1 **Completa** Un punto P ha coordinate (a, b):

a. il suo simmetrico rispetto all'asse x ha coordinate ....

b. il suo simmetrico rispetto all'asse y ha coordinate ....

c. il suo simmetrico rispetto all'origine ha coordinate ....

2 **Vero o falso** Dati i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, si può dire che:

a. se $y_A + y_B = 0$ i punti A e B sono simmetrici rispetto all'asse y V F

b. se $x_A + x_B = 0$ i punti A e B sono simmetrici rispetto all'asse x V F

c. se $x_A + x_B = 0 \ \wedge \ y_A + y_B = 0$ i punti A e B sono simmetrici rispetto all'origine V F

d. se $x_A - x_B = 0 \ \wedge \ y_A + y_B = 0$ i punti A e B sono simmetrici rispetto all'asse x. V F

3 **Test** I punti $A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ si corrispondono nella simmetria:

a. rispetto all'asse x **b.** rispetto all'asse y **c.** rispetto all'origine

4 **Test** Un vettore nel piano cartesiano è individuato dalle sue componenti cartesiane; se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ sono i punti estremi del vettore $\overrightarrow{AB}$, le sue componenti cartesiane sono:

a. $(x_B - x_A, y_B - y_A)$

b. $(x_A - x_B, y_A - y_B)$

c. indifferentemente le risposte dei due punti precedenti

d. $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

5 **Test** Il punto $B(2, 2)$ è il corrispondente del punto $A(3, -1)$ nella traslazione di vettore:

a. $\vec{v} = (3, -1)$ **b.** $\vec{v} = (1, -3)$ **c.** $\vec{v} = (-1, 3)$

6 **Test** I punti $A(2, 1)$ e $C(0, 5)$ sono due dei tre vertici di un triangolo ABC isoscele di base AB. Osservato che di triangoli di questo tipo ce ne sono infiniti, quale fra le seguenti può essere una possibile posizione del punto B?

a. è simmetrico di A rispetto all'asse y ed ha coordinate $(-2, 1)$

b. è simmetrico di A rispetto all'asse x ed ha coordinate $(2, -1)$

c. è simmetrico di C rispetto all'asse x ed ha coordinate $(-5, 0)$

7 **Test** Nella simmetria di centro $P(3, 2)$, il corrispondente del segmento AB di estremi $A(2, -1)$ e $B(0, 3)$ è il segmento $A'B'$ di estremi:

a. $A'(-1, 0)$; $B'(3, -2)$ **b.** $A'(8, 3)$; $B'(6, 9)$ **c.** $A'(4, 3)$; $B'(6, 7)$ **d.** $A'(4, 5)$; $B'(6, 1)$

8 **Test** Il corrispondente del punto $P(3, -5)$ nella traslazione di vettore $\vec{v} = (-1, 3)$ ha coordinate:

a. $(-4, 8)$ **b.** $(4, -8)$ **c.** $(-2, 2)$ **d.** $(2, -2)$

9 **Test** Il punto $P'(0, 4)$ è il corrispondente di P nella traslazione di vettore $\vec{v} = (-2, 1)$. Le coordinate di P sono:

a. $(-2, 3)$ **b.** $(3, -2)$ **c.** $(2, 3)$ **d.** $(-2, 5)$

Risolvi i seguenti problemi.

10 **esercizio svolto**

Del punto $P(1, -2)$ troviamo il corrispondente P':

a. nella simmetria rispetto all'asse x
b. nella simmetria rispetto all'asse y
c. nella simmetria rispetto all'origine
d. nella traslazione di vettore $\vec{v} = (3, -1)$.

a. Il simmetrico di P rispetto all'asse x ha la stessa ascissa e ordinata opposta, quindi: $P'(1, 2)$

b. Il simmetrico di P rispetto all'asse y ha la stessa ordinata e ascissa opposta, quindi: $P'(-1, -2)$

c. Il simmetrico di P rispetto all'origine ha entrambe le coordinate opposte, quindi: $P'(-1, 2)$

d. Le coordinate di P' si ottengono dalle relazioni $\begin{cases} x' = 1 + 3 \\ y' = -2 - 1 \end{cases}$, quindi: $P'(4, -3)$.

11 Calcola le coordinate dei punti P' simmetrici dei punti P assegnati rispetto all'asse x:

$P(3, 1)$ $\quad P(-2, 4)$ $\quad P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $\quad P\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$

12 Individua quali fra i seguenti punti sono simmetrici rispetto all'asse x:

$A(3, -2)$ $\quad B\left(\frac{1}{3}, 4\right)$ $\quad C(3, 5)$ $\quad D(3, 2)$ $\quad E\left(-\frac{1}{3}, 4\right)$ $\quad F\left(\frac{1}{3}, -4\right)$ $\quad G\left(\frac{2}{5}, 4\right)$

13 Calcola le coordinate dei punti P' simmetrici dei punti P assegnati rispetto all'asse y:

$P(1, 1)$ $\quad P(-4, 2)$ $\quad P\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ $\quad P\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$

14 Dato il triangolo di vertici $A(0, 2)$, $B(3, 1)$, $C(0, -2)$, determina le coordinate dei vertici del suo simmetrico rispetto all'asse y. Ci sono punti uniti nella trasformazione?

15 Calcola le coordinate dei punti P' simmetrici dei punti P assegnati rispetto all'origine del sistema di riferimento e rispetto al punto $A\left(3, \frac{1}{2}\right)$:

$P(4, -1)$ $\quad P(-1, 3)$ $\quad P\left(\frac{2}{5}, 1\right)$ $\quad P\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$

16 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(2, -1)$ ammette l'origine come centro di simmetria. Di che tipo di quadrilatero si tratta?

17 Un parallelogramma ha due vertici consecutivi nei punti $A\left(3, \frac{5}{2}\right)$ e $B\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ ed ha centro di simmetria nell'origine; trova le coordinate degli altri due vertici.

18 Trova il punto P' corrispondente del punto P nella traslazione di vettore $\vec{v}$ assegnato:

a. $P(2, 3)$ $\quad \vec{v} = (-1, 4)$
b. $P(1, -3)$ $\quad \vec{v} = (2, 1)$
c. $P(2, -1)$ $\quad \vec{v} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

19 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(3, 5)$, $B(5, 2)$, $C(0, -1)$, $D(-2, 2)$ è un parallelogramma e trova le coordinate dei vertici del suo simmetrico:

a. rispetto all'asse x
b. rispetto all'asse y
c. rispetto all'origine.

20 **esercizio svolto**

Il punto $P'(5, -3)$ è l'immagine di un punto P nella traslazione di vettore $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$; calcola le coordinate di P.

Fra le coordinate (x, y) del punto P e quelle del punto P' devono sussistere le seguenti relazioni:

$$x - \frac{1}{2} = 5 \qquad \text{e} \qquad y + 2 = -3$$

Risolvendo queste due equazioni si ottiene che $x = \frac{11}{2}$ e $y = -5$, quindi $P\left(\frac{11}{2}, -5\right)$.

21 Nella traslazione di vettore $\vec{v} = (-3, 5)$ al segmento AB corrisponde il segmento $A'B'$ di estremi $A'(-2, 3)$ e $B'(1, -3)$. Calcola le coordinate di A e B. [$A(1, -2)$, $B(4, -8)$]

22 Il triangolo di coordinate $A'(4, -4)$, $B'(5, 1)$, $C'(2, -1)$ è il corrispondente del triangolo ABC nella traslazione di vettore $\vec{v} = (5, -5)$; calcola le coordinate dei vertici di ABC. [$A(-1, 1)$, $B(0, 6)$, $C(-3, 4)$]

23 Due vertici del quadrilatero $ABCD$ sono i punti $A(2, 1)$ e $B(-1, 2)$ e gli altri due sono i loro simmetrici rispetto all'origine; dopo aver trovato tali punti ed aver verificato che il quadrilatero ottenuto è un quadrato, trovane il perimetro e l'area. [$2p = 4\sqrt{10}$; $A = 10$]

24 Sia M il punto medio del segmento AB di estremi $A(-4, 2)$, $B(2, -4)$; calcola le coordinate del punto M' simmetrico di M rispetto all'origine e, dopo aver verificato che il triangolo $AM'B$ è isoscele, calcolane l'area. [$M'(1, 1)$; area $= 12$]

25 Dato il triangolo di vertici $A(3, 1)$, $B(6, 2)$, $C(4, 4)$, determina le coordinate dei vertici del triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto all'origine degli assi e poi i vertici del triangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto all'asse y. Qual è la trasformazione in cui si corrispondono ABC e $A''B''C''$?

26 Dato il segmento di estremi $A(2, -1)$, $B(3, 5)$, determina il suo corrispondente $A'B'$ nella traslazione di vettore $\vec{v} = (-2, 3)$, quindi verifica che i due segmenti hanno la stessa lunghezza.

27 Dato il triangolo di vertici $A(1, 2)$, $B(5, 3)$ e $C(6, 1)$, determina le coordinate dei vertici del suo corrispondente nella simmetria di asse x. Verifica poi che i due triangoli hanno lo stesso perimetro.

28 Determina il trasformato del triangolo $A(-4, 2)$, $B(5, 5)$, $C(2, -1)$ mediante la simmetria rispetto all'asse y. Verifica che i due triangoli sono entrambi isosceli e che hanno lo stesso perimetro.

[$2p = 3\sqrt{10}(1 + \sqrt{2})$]

29 Trova le coordinate dei punti A' e B' simmetrici dei punti $A(4, 1)$ e $B(1, 5)$ rispetto all'asse y. Determina la natura del quadrilatero $ABB'A'$ e trovane perimetro e area. [$2p = 20$; area $= 20$]

30 Di un parallelogramma $ABCD$ sono noti i vertici $A(6, 9)$ e $B(-3, 2)$. Trova le coordinate degli altri due vertici sapendo che il punto di intersezione delle diagonali è l'origine del piano cartesiano e verifica che si tratta di un rombo. [$C(-6, -9)$; $D(3, -2)$]

31 Trova i simmetrici A e B dei punti $C(0, 4)$ e $D(-3, 0)$ rispetto all'origine degli assi cartesiani. Dopo aver stabilito la natura del quadrilatero $ABCD$, calcolane il perimetro e l'area. [$2p = 20$; area $= 24$]

32 Trova il trasformato del poligono di vertici $A(0, 1)$, $B(4, 2)$, $C(-3, 6)$, $D(-5, 2)$ nella traslazione di vettore $\vec{v} = (2, -1)$.

33 Un segmento ha estremi di coordinate $A(-3, 0)$ e $B(0, -2)$. Dopo aver individuato i loro corrispondenti A' e B' nella traslazione di vettore $\vec{v} = (3, 3)$, calcola il perimetro del quadrilatero $AA'B'B$.

[$A'(0, 3)$; $B'(3, 1)$; $2p = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{13}$]

SOLUZIONI

1 **a.** $(a, -b)$; **b.** $(-a, b)$; **c.** $(-a, -b)$ **2** **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V **3** **a.** **4** **a.** **5** **c.**

6 **a.** **7** **d.** **8** **d.** **9** **c.**