APPROFONDIMENTO

L'area del segmento parabolico

Un segmento parabolico è la parte finita di piano delimitata da una parabola γ e da una retta r ad essa secante (***figura 1***).
Il calcolo dell'area di un segmento parabolico risale ad Archimede. Indichiamo con A e B i punti d'intersezione della parabola con la retta r; il segmento AB si dice **base** del segmento parabolico.
Consideriamo poi la tangente alla parabola parallela a r e indichiamo con C il punto di tangenza (***figura 2***). Si dimostra che:

> l'area del segmento parabolico di base AB è uguale ai $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABC.

Figura 1

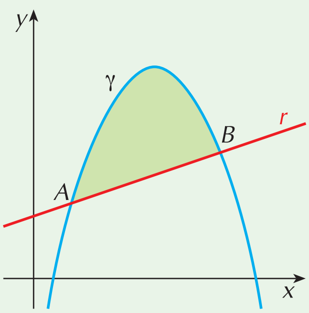
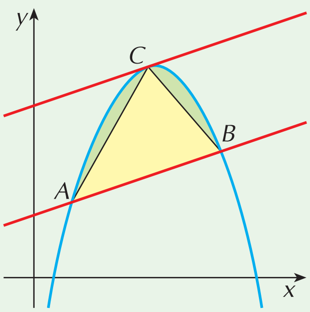


Figura 2



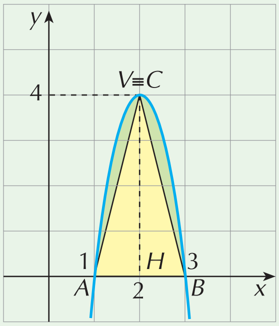
Primo esempio

Consideriamo la parabola di equazione $y = -4x^2 + 16x - 12$ e determiniamo l'area del segmento parabolico da essa individuato insieme all'asse x.

La parabola ha vertice in $V(2, 4)$ e interseca l'asse x nei punti di ascissa 1 e 3, quindi $A(1, 0)$ e $B(3, 0)$.
La retta tangente parallela all'asse x è quella che passa per il vertice e quindi il punto C è proprio il vertice.
Il triangolo ha quindi base AB e altezza VH la cui misura è l'ordinata di V:

$\overline{AB} = |3 - 1| = 2 \qquad \overline{VH} = 4$

L'area S del segmento parabolico è quindi data da: $S = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4}{2}\right) = \frac{16}{3}$.



Secondo esempio

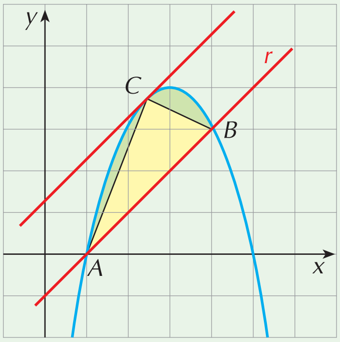
Determiniamo l'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola $y = -x^2 + 6x - 5$ e dalla retta $r: y = x - 1$.

Individuiamo prima di tutto i punti A e B di intersezione tra la parabola e r:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A(1, 0) \quad B(4, 3)$$

Troviamo la parallela a r che è tangente alla parabola:

- equazione della retta parallela a r: $\quad y = x + k$
- sistema parabola-retta: $\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = x + k \end{cases}$
- equazione risolvente: $\quad x^2 - 5x + k + 5 = 0$
- condizione di tangenza $\triangle = 0$: $\quad 25 - 4(k + 5) = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{5}{4}$



- equazione della tangente: $y = x + \frac{5}{4}$

Determiniamo il punto di tangenza: $\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = x + \frac{5}{4} \end{cases} \quad \rightarrow \quad C\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$

Per calcolare l'area del triangolo ABC ci serve:

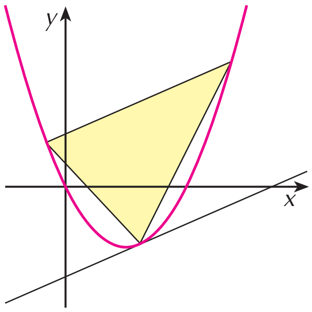
- la misura di AB: $\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2} = 3\sqrt{2}$
- l'altezza, che calcoliamo come distanza del punto C dalla retta r:

$$r: x - y - 1 = 0 \qquad d = \frac{\left|\frac{5}{2} - \frac{15}{4} - 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}$$

- l'area del triangolo è: $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{27}{8}$

L'area del segmento parabolico è quindi: $\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{8} = \frac{9}{2}$.

ESERCIZI



1 Il triangolo in figura ha area 6; quanto vale l'area del segmento parabolico che lo contiene?

a. $\frac{9}{2}$ **b.** 8 **c.** 12 **d.** 4

2 Una parabola ha vertice nel punto $V(3, 6)$ e taglia l'asse x nei punti di ascissa 1 e 5; quanto vale l'area del segmento parabolico da essa delimitato insieme all'asse x?

a. 24 **b.** 12 **c.** 16 **d.** 8

3 **ESERCIZIO GUIDATO**

La parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ individua un segmento parabolico con la retta r di equazione $y = x$. Calcoliamo la sua area.

Troviamo innanzi tutto i punti d'intersezione delle due curve risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ y = x \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$$

La parabola e la retta si intersecano nell'origine e nel punto $A(6, 6)$.

Troviamo adesso la retta tangente alla parabola parallela alla retta r:

- retta parallela a r: $y = x + k$
- sistema parabola-retta: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x \\ y = x + k \end{cases}$

- equazione risolvente: $x^2 - 6x - 2k = 0$
- condizione di tangenza: $9 + 2k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -\dfrac{9}{2}$

La retta tangente ha equazione $y = x - \dfrac{9}{2}$.

Determiniamo il punto di tangenza C completando la risoluzione del sistema:

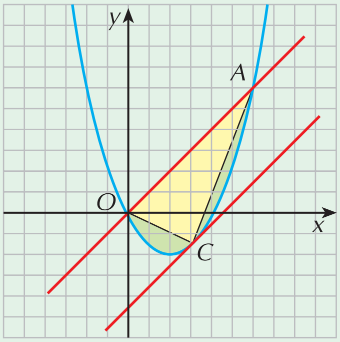
$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x \\ y = x - \dfrac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = x - \dfrac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad C\left(3, -\dfrac{3}{2}\right)$$

Calcoliamo l'area del triangolo OAC:

- misura del segmento OA: $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$
- altezza del triangolo (distanza di C dalla retta OA):

equazione della retta: $x - y = 0$ $\qquad d = \dfrac{\left|3 + \dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$

- area del triangolo: $\dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \dfrac{9}{2\sqrt{2}} = \dfrac{27}{2}$



Possiamo adesso calcolare l'area del segmento parabolico: $\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{27}{2} = 18$

4 Determina l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola $y = x^2 - 5x + 4$ con l'asse x. $\left[\dfrac{9}{2}\right]$

5 Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola $y = -x^2 + 2x$ con la retta di equazione $y = x - 2$. $\left[\dfrac{9}{2}\right]$

6 Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola $x = -\dfrac{1}{3}y^2 + 3$ con l'asse y. $[12]$

7 La parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + k$ determina con l'asse x un segmento parabolico di area $\dfrac{256}{3}$. Trova l'equazione della parabola. $[y = -x^2 + 2x + 15]$

8 Una parabola con asse parallelo all'asse x e avente la concavità verso destra, interseca l'asse y nei punti di ordinata -1 e 4; se l'area del segmento parabolico determinato con l'asse y è $\dfrac{125}{6}$, qual è l'equazione della parabola? $[x = y^2 - 3y - 4]$

9 Sia F il fuoco della parabola di equazione $y = x^2 + 1$. Indicati con A e B i punti della parabola di ordinata uguale a 5:

a. individua il segmento parabolico delimitato dalla retta AB e calcolane l'area

b. trova l'area del triangolo ABF.

$\left[F\left(0, \dfrac{5}{4}\right); \textbf{a. } \dfrac{32}{3}; \textbf{b. } \dfrac{15}{2}\right]$