L'algoritmo Euclideo: un altro modo per calcolare *M.C.D.* e *m.c.m.*

Algoritmo è la successione dettagliata e finita di tutte le operazioni da compiere per risolvere un problema.

Euclide, nei suoi *Elementi*, descrive due algoritmi particolari per la determinazione del *M.C.D.* tra due numeri: il primo si basa sull'esecuzione di sottrazioni successive, il secondo su divisioni successive.

Il metodo delle sottrazioni successive

L'osservazione su cui si basa questo metodo è che se due numeri naturali a e b, con $a > b$, sono divisibili per un terzo numero k, allora anche la loro differenza è divisibile per k. Per esempio, poiché 35 e 15 sono entrambi divisibili per 5, anche $35 - 15 = 20$ è divisibile per 5.
Questo significa che, se $a > b$

$$M.C.D.\ (a,\ b) = M.C.D.\ (a - b,\ b)$$

L'algoritmo per determinare il *M.C.D.* è quindi il seguente:

- se $a < b$ scambia a con b
- esegui la differenza $a - b$
- se la differenza è zero → $M.C.D.(a,\ b) = b$
- se la differenza non è zero → ripeti i passi dall'inizio.

Per esempio, per trovare $M.C.D.(20,\ 15)$ procediamo così:

- $20 - 15 = 5$ → $M.C.D.(20,\ 15) = M.C.D.(5,\ 15) = M.C.D.(15,\ 5)$
  valori scambiati
- $15 - 5 = 10$ → $M.C.D.(15,\ 5) = M.C.D.(10,\ 5)$
- $10 - 5 = 5$ → $M.C.D.(10,\ 5) = M.C.D.(5,\ 5)$
- $5 - 5 = 0$

Quindi $M.C.D.(20,\ 15) = 5$
L'inconveniente di questo metodo è che il numero di sottrazioni da eseguire può anche essere elevato (prova a calcolare con questo metodo $M.C.D.\ (800,\ 6)$) e quindi l'algoritmo non è molto efficiente.

Il metodo delle divisioni successive

Un metodo decisamente più efficace si basa sulla considerazione che, se r è il resto della divisione intera di due numeri a e b, con $a > b$, allora:

- se $r = 0$ → $M.C.D.\ (a,\ b) = b$
- se $r \neq 0$ → $M.C.D.\ (a,\ b) = M.C.D.\ (b,\ r)$

Per trovare il *M.C.D.* è quindi sufficiente continuare ad eseguire divisioni successive fino a trovare resto zero.
Calcoliamo per esempio con questo metodo $M.C.D.\ (72,\ 16)$:

- $72 : 16 = 4$ con resto 8, quindi $M.C.D.\ (72,\ 16) = M.C.D.\ (16,\ 8)$
- $16 : 8 = 2$ con resto 0, quindi $M.C.D.\ (16,\ 8) = 8$

In definitiva, $M.C.D.\ (72,\ 16) = 8$.

Il calcolo del m.c.m.

Anche il *m.c.m.* tra due numeri interi a e b si può calcolare applicando l'algoritmo euclideo tenendo presente che:

$$m.c.m.\ (a,\ b) = \frac{a \cdot b}{M.C.D.\ (a,\ b)}$$

Per esempio, poiché abbiamo visto che $M.C.D.\ (72,\ 16) = 8$, allora $m.c.m.\ (72,\ 16) = \frac{72 \cdot 16}{8} = 144$.

Esercizi

1 In base a uno degli algoritmi di Euclide si può dire che:

a. $M.C.D.\ (16,\ 6) = M.C.D.\ (10,\ 6)$ V F

b. $M.C.D.\ (26,\ 8) = M.C.D.\ (8,\ 2)$ V F

c. $M.C.D.\ (81,\ 18) = M.C.D.\ (18,\ 10)$ V F

d. $m.c.m.\ (15,\ 9) = \frac{15 \cdot 9}{6}$ V F

[**a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** F]

Calcola il M.C.D. tra i numeri indicati applicando il metodo delle sottrazioni successive.

2	48, 54	25, 36	72, 40
3	64, 38	52, 8	84, 12
4	108, 180	70, 56	630, 520
5	150, 12	81, 66	90, 42

Calcola il M.C.D. tra i numeri indicati applicando il metodo delle divisioni successive.

6	21, 49	80, 78	98, 42
7	76, 57	78, 12	102, 18
8	240, 160	225, 74	684, 28
9	768, 528	380, 190	468, 624

Calcola il m.c.m. tra i numeri indicati basandoti sull'algoritmo euclideo.

10	5, 35	82, 16	27, 48
11	72, 68	48, 56	135, 315
12	36, 48	65, 39	120, 45
13	306, 408	756, 630	580, 870