Concetti chiave e regole

Disposizioni e combinazioni

Considerati n oggetti si dice:

- **disposizione semplice** di classe k (con $k \leq n$) ogni allineamento di k oggetti scelti fra gli n disponibili (conta l'ordine)
- **combinazione semplice** di classe k (con $k \leq n$) ogni raggruppamento di k oggetti scelti fra gli n disponibili indipendentemente dall'ordine con cui vengono presi.

Si parla poi di disposizioni o combinazioni **con ripetizione** se ciascuno degli oggetti scelti può essere ripetuto più volte.

Il numero delle disposizioni o delle combinazioni che si possono fare con n oggetti si calcola con le seguenti formule:

- disposizioni semplici di classe k : $D_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ con $k \leq n$
- disposizioni con ripetizione di classe k : $D^r_{n,k} = n^k$ con $k \gtreqless n$
- permutazioni di n elementi: $P_n = n!$
- permutazioni di n elementi di cui h uguali fra loro, k uguali fra loro ..... $P^*_{n,\,h,\,k,\,.....} = \dfrac{n!}{h! \cdot k!.....}$
- combinazioni semplici di classe k : $C_{n,k} = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ con $k \leq n$
- combinazioni con ripetizione di classe k : $C^r_{n,k} = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!}$ con $k \gtreqless n$

Il coefficiente binomiale e il binomio di Newton

Il simbolo $\dbinom{n}{k}$ prende il nome di coefficiente binomiale e gode di alcune proprietà che sono espresse dalle seguenti relazioni:

- $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- $\dbinom{n}{0} = 1$ e $\dbinom{n}{1} = n$
- $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
- $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$ **formula di Stifel**

La formula del binomio di Newton permette di calcolare la potenza n-esima di un binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^{n-k} b^k$

dove il simbolo $\sum_{k=0}^{n}$ indica la somma dei termini della forma $\dbinom{n}{k} a^{n-k} b^k$ facendo variare k da 0 a n.

Il concetto di probabilità

Un **esperimento aleatorio** è un fenomeno di qualsiasi natura al quale è associata una situazione di incertezza. L'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio costituisce lo **spazio campionario** Ω. Un evento aleatorio è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio campionario. La probabilità di un evento esprime una misura della possibilità che ha quell'evento di realizzarsi.

La **probabilità** di un evento E di uno spazio campionario Ω può essere data in diversi modi:

- secondo il **modello classico**, essa è il rapporto fra il numero f di casi favorevoli all'evento ed il numero n dei casi possibili;
- secondo il **modello statistico**, è il rapporto fra il numero f di volte in cui l'evento si è verificato ed il numero n di prove fatte, quando n è molto grande.
  La **legge dei grandi numeri** ci dice poi che tale valore di probabilità, per n molto grande, tende ad essere uguale alla probabilità teorica intesa in senso classico;

- secondo il **modello soggettivo**, è il rapporto fra il prezzo P che un individuo è disposto a pagare, ed eventualmente a perdere se l'evento non si verifica, e la somma S che riceverà in cambio al verificarsi dell'evento.

  La probabilità di un evento E è dunque un numero compreso fra 0 e 1; in particolare:
  - se $p(E) = 1$, l'evento E si dice **certo**
  - se $p(E) = 0$, l'evento E si dice **impossibile**.

I primi teoremi sul calcolo delle probabilità

Un evento è spesso il risultato di operazioni insiemistiche; per calcolare la probabilità di un tale evento si applicano i seguenti teoremi:

- teorema della **probabilità contraria**: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- teorema della **probabilità totale**: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
  e, nel caso di eventi incompatibili, essendo $p(A \cap B) = 0$: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

La probabilità condizionata

In alcuni casi, la probabilità di un evento A dipende dal verificarsi di un altro evento B; si parla allora di **probabilità condizionata** e si scrive $p(A|B)$. La probabilità condizionata è definita dalla formula (se, rispettivamente nei due casi, B e A non sono gli eventi impossibili):

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad \text{e analogamente} \qquad p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Se da queste due relazioni ricaviamo la probabilità dell'evento intersezione otteniamo il teorema della **probabilità composta:**

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

che ci dice che

- la probabilità dell'evento intersezione di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno di essi per la probabilità condizionata dell'altro, supposto che il primo si sia verificato.

Quando $p(A|B) = p(A)$, cioè quando il sapere che si è verificato B non altera la probabilità di A, i due eventi si dicono **indipendenti**; nel caso di eventi indipendenti il teorema della probabilità composta diventa:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$