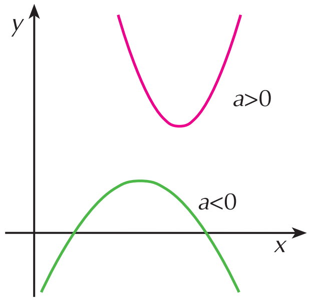
Concetti chiave e regole

La parabola e la sua equazione

La parabola è il luogo dei punti che hanno uguale distanza da un punto fisso F, detto fuoco, e da una retta fissa d, detta direttrice.

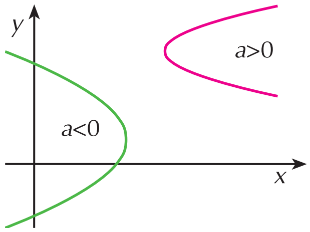
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, l'equazione di una parabola ha forma diversa a seconda che l'asse di simmetria sia parallelo all'asse x o all'asse y.



- Se l'asse di simmetria è parallelo all'asse y la parabola ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

e la concavità è rivolta: verso l'alto se $a > 0$
verso il basso se $a < 0$



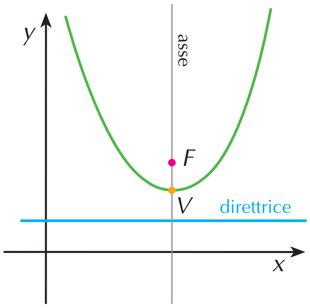
- Se l'asse di simmetria è parallelo all'asse x la parabola ha equazione

$$x = ay^2 + by + c$$

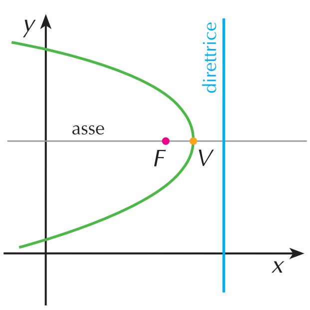
e la concavità è rivolta: verso destra se $a > 0$
verso sinistra se $a < 0$

Gli elementi caratteristici

Se si conosce l'equazione di una parabola, posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si possono trovare il vertice, il fuoco, l'equazione dell'asse e della direttrice con queste formule:



- per la parabola $y = ax^2 + bx + c$:
  - vertice $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$
  - fuoco $F\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$
  - asse $x = -\dfrac{b}{2a}$
  - direttrice $y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$



- per la parabola $x = ay^2 + by + c$:
  - vertice $V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}, -\dfrac{b}{2a}\right)$
  - fuoco $F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}, -\dfrac{b}{2a}\right)$
  - asse $y = -\dfrac{b}{2a}$
  - direttrice $x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$

Il grafico

Per tracciare il grafico di una parabola quando è nota la sua equazione è indispensabile trovare il vertice e le coordinate di qualche punto (non è necessario, anche se può essere utile, trovare le coordinate del fuoco e l'equazione dell'asse o della direttrice).

Le condizioni per determinare l'equazione di una parabola

Per trovare l'equazione di una parabola sono necessarie e sufficienti tre informazioni indipendenti; in particolare:

- se è noto il vertice (x_0, y_0) è comodo usare la formula

  $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ se la parabola ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y

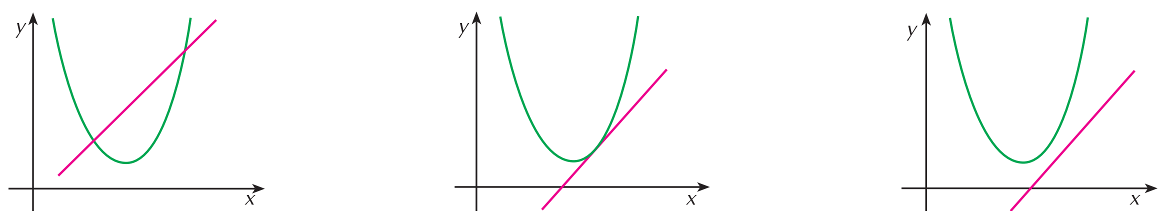
  $x - x_0 = a(y - y_0)^2$ se la parabola ha l'asse di simmetria parallelo all'asse x

  Serve poi un'altra informazione per determinare il parametro a.
- se sono note le coordinate di tre punti, basta sostituire tali coordinate nell'equazione generale della parabola e risolvere il sistema ottenuto.

Rette e parabole

Per determinare la **posizione di una retta rispetto a una parabola** si deve:

- impostare il sistema retta-parabola
- determinare l'equazione risolvente di secondo grado nella variabile x (oppure y) a seconda del tipo di parabola
- calcolare il discriminante Δ di questa equazione: se $\Delta > 0$ la retta è secante la parabola
  se $\Delta = 0$ la retta è tangente alla parabola
  se $\Delta < 0$ la retta non interseca la parabola



a. $\Delta > 0$ la retta è secante **b.** $\Delta = 0$ la retta è tangente **c.** $\Delta < 0$ la retta è esterna

Le rette tangenti

Per trovare l'equazione della **retta tangente** a una parabola si deve calcolare il discriminante Δ dell'equazione risolvente il sistema retta-parabola e imporre che sia $\Delta = 0$.
In particolare, se la retta tangente deve passare per un punto $P(x_0, y_0)$ che appartiene alla parabola, oltre al metodo illustrato è possibile seguire anche queste procedure:

- scrivere l'equazione della retta $y - y_0 = m(x - x_0)$ dove:
  - $m = 2ax_0 + b$ se la parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$
  - $m = \dfrac{1}{2ay_0 + b}$ se la parabola è del tipo $x = ay^2 + by + c$
- applicare le **formule di sdoppiamento** ponendo nell'equazione della parabola, a seconda della forma:

  x_0x al posto di x^2 y_0y al posto di y^2 $\dfrac{1}{2}(x_0 + x)$ al posto di x $\dfrac{1}{2}(y_0 + y)$ al posto di y

I fasci di parabole

Se l'equazione di una parabola dipende da un parametro, si ha un **fascio di parabole**; ognuna di esse, salvo casi particolari, si ottiene attribuendo un particolare valore al parametro. Fra le parabole del fascio può essere compresa una retta che rappresenta la parabola degenere.
Se due parabole del fascio si intersecano, anche tutte le altre si intersecano negli stessi punti che si dicono **punti base** del fascio; può quindi capitare che un fascio abbia:

- due punti base
- un solo punto base
- nessun punto base