APPROFONDIMENTO

I polinomi di Taylor

Molto spesso non è possibile determinare il valore esatto di una funzione in un punto. Per esempio:

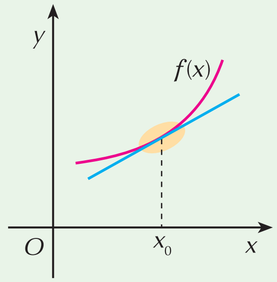
se $f(x) = \ln x$ quanto vale $f(1{,}5)$ cioè $\ln 1{,}5$?

La calcolatrice ci restituisce un valore approssimato, 0,405465108, che viene calcolato con un particolare algoritmo che si basa sul concetto di approssimazione di una funzione in un punto.
Sappiamo che una funzione può essere approssimata nelle vicinanze di un punto x_0 con la retta ad essa tangente in x_0 (***figura 1***); se la funzione è $f(x)$, la retta tangente in $P(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{cioè} \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

e un valore approssimato di $f(x)$ in un punto x nelle immediate vicinanze di x_0 è proprio $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Figura 1



I Esempio.

Se $f(x) = \ln x$, per valutare $\ln 1{,}5$, valore di x nelle vicinanze di 1, possiamo trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f(1) = \ln 1 = 0 \quad f'(1) = 1 \quad \text{retta tangente:} \quad y - 0 = 1(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = x - 1$$

e calcolare il valore assunto dalla variabile dipendente y in $x = 1{,}5$: $y = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$

Un valore approssimato di $\ln 1{,}5$ è 0,5.

Come si nota dal confronto con il valore ottenuto con la calcolatrice, l'approssimazione del valore di ln 1,5 con la retta tangente è piuttosto grossolana.
Se vogliamo avere approssimazioni migliori, dobbiamo sostituire la retta con altre funzioni polinomiali, facili da valutare, che possano approssimare meglio $f(x)$ in x_0. Cercheremo quindi funzioni di secondo, terzo, quarto grado e oltre a seconda della precisione desiderata nell'approssimazione; infatti, maggiore è il grado del polinomio, migliore è l'approssimazione.
Per ottenere questo, è necessario che le derivate prima, seconda, terza e quelle successive fino ad un certo ordine n, della funzione e del polinomio siano uguali in x_0. Diamo la seguente definizione.

Data una funzione $f(x)$, derivabile n volte nell'intorno di un punto x_0, chiamiamo **polinomio di Taylor** di ordine n della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0, il polinomio $P_n(x)$ dato dalla seguente formula:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

In particolare, se $x_0 = 0$, il polinomio $P_n(x)$ diventa

$$P_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

e prende il nome di **polinomio di Mc Laurin**.

Le derivate successive di un polinomio di Taylor valutate in x_0 sono proprio uguali alle derivate successive della funzione $f(x)$ calcolate nello stesso punto, in quanto tutti i termini $(x - x_0)^k$ che compaiono nelle derivate successive diventano nulli in x_0.
Verifichiamolo, a titolo di esempio, per quanto riguarda la derivata prima:

$$P'_n(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 3(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n(x - x_0)^{n-1}$$

Il simbolo n!, che si legge n fattoriale, è il prodotto di n fattori decrescenti a partire da n, cioè:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Per esempio

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$$P'_n(x_0) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2(x_0 - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 3(x_0 - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n(x_0 - x_0)^{n-1} = f'(x_0)$$

I polinomi di Taylor costituiscono quindi l'approssimazione di $f(x)$ che stavamo cercando.

II Esempio.

Troviamo il polinomio di Taylor di ordine 5 della funzione $f(x) = \ln x$ relativo al punto $x_0 = 1$.

Calcoliamo le derivate fino alla quinta di $f(x)$:

$$f' = \frac{1}{x} \qquad f'' = -\frac{1}{x^2} \qquad f''' = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(4)} = -\frac{6}{x^4} \qquad f^{(5)} = \frac{24}{x^5}$$

Calcoliamo $f(1)$ e le derivate nel punto 1:

$$f(1) = 0 \qquad f'(1) = 1 \qquad f''(1) = -1 \qquad f'''(1) = 2 \qquad f^{(4)}(1) = -6 \qquad f^{(5)}(1) = 24$$

Scriviamo il polinomio di Taylor di ordine 5:

$$P_5(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{-1}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{2}{3!} \cdot (x-1)^3 + \frac{-6}{4!} \cdot (x-1)^4 + \frac{24}{5!} \cdot (x-1)^5$$

Sviluppando i calcoli otteniamo: $P_5(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{5}{4}x^4 + \dfrac{10}{3}x^3 - 5x^2 + 5x - \dfrac{137}{60}$

Calcoliamo adesso il polinomio di ordine 5 nel punto 1,5: $P_5(1{,}5) = 0{,}4072916666$
valore molto più vicino a 0,405465108 trovato con la calcolatrice.
Aumentando l'ordine del polinomio, anche l'approssimazione migliora.

Appprossimando una funzione $f(x)$ con il suo polinomio di Taylor o di Mac Laurin di ordine n nel punto x_0 commettiamo evidentemente un errore, cioè:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

Il termine $E_n(x)$ prende il nome di **resto**; si può dimostrare che esso è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, cioè tende più rapidamente a zero di $(x - x_0)^n$ quando $x \to x_0$. Il resto si può esprimere in modi diversi, uno dei quali è dovuto a Lagrange:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

dove ξ è un opportuno punto compreso tra x e x_0.

1 Un polinomio di Taylor:

a. serve ad approssimare una funzione:
① nel suo dominio
② in un intorno di un punto appartenente al dominio
③ in un qualsiasi intervallo del suo dominio

b. la funzione deve essere:
① continua ② derivabile almeno una volta ③ derivabile n volte

[**a.** ②; **a.** ③]

Determina i polinomi di Taylor di ordine n che approssimano le funzioni $f(x)$ assegnate nei punti x_0; trova poi un valore approssimato di $f(x)$ nei punti x indicati.

2 ESERCIZIO GUIDATO

$f(x) = \ln^2 x$ in $x_0 = 1$ per $n = 4$ trova un valore approssimato di $f(1{,}2)$

Calcoliamo le derivate della funzione f fino al quarto ordine ed il loro valore nel punto x_0

$f'(x) = \dfrac{2 \ln x}{x}$ $\quad f''(x) = 2\,\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ $\quad f'''(x) = 2\,\dfrac{2 \ln x - 3}{x^3}$ $\quad f^{(4)}(x) = 2\,\dfrac{11 - 6 \ln x}{x^4}$

$f'(1) = 0$ $\quad f''(1) = 2$ $\quad f'''(1) = -6$ $\quad f^{(4)}(1) = 22$

Inoltre $f(1) = 0$. Il polinomio di Taylor del quarto ordine è dunque

$$P_n(x) = (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{22}{4!}(x-1)^4$$

da cui sviluppando i calcoli $P_n(x) = \dfrac{11}{12}x^4 - \dfrac{14}{3}x^3 + \dfrac{19}{2}x^2 - \dfrac{26}{3}x + \dfrac{35}{12}$

Per trovare il valore approssimato di $\ln^2 1{,}2$ calcoliamo $P_4(x)$ in $x = 1{,}2$: $\quad P_4(1{,}2) = 0{,}03347$

3 $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad n = 5$ $\quad$ trova $f(0{,}15)$ $\quad \left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5;\ 0{,}1494\right]$

4 $f(x) = \ln x$ $\quad x_0 = 1$ $\quad n = 3$ $\quad$ trova $f(1{,}1)$ $\quad \left[-\frac{11}{6} - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{3}x^3;\ 0{,}0953\right]$

5 $f(x) = \cos x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad n = 3$ $\quad$ trova $f(0{,}2)$ $\quad \left[1 - \frac{1}{2}x^2;\ 0{,}98\right]$

6 $f(x) = \tan x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad n = 3$ $\quad$ trova $f(0{,}1)$ $\quad \left[x + \frac{1}{3}x^3;\ 0{,}1003\right]$

7 $f(x) = \arctan x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad n = 4$ $\quad$ trova $f(0{,}12)$ $\quad \left[x - \frac{1}{3}x^3;\ 0{,}1194\right]$

8 $f(x) = x\, e^{-x}$ $\quad x_0 = 0$ $\quad n = 5$ $\quad$ trova $f(0{,}25)$ $\quad \left[x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5;\ 0{,}1947\right]$

9 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad x_0 = 1$ $\quad n = 3$ $\quad$ trova $f(1{,}3)$ $\quad \left[-\frac{13}{3} + \frac{19}{2}x - 7x^2 + \frac{11}{6}x^3;\ 0{,}2145\right]$

10 $f(x) = e^x + e^{-x}$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 5 \quad$ trova $f(0{,}16)$ $\quad \left[2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4;\ 2{,}0257\right]$

11 $f(x) = \sin^2 x$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 5 \quad$ trova $f(0{,}2)$ $\quad \left[x^2 - \frac{1}{3}x^4;\ 0{,}03947\right]$

12 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 5 \quad$ trova $f(0{,}15)$ $\quad \left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4;\ 1{,}0112\right]$