Concetti chiave e regole

Le disequazioni in due variabili

Una disequazione lineare in due variabili $f(x, y) > 0$ ha per soluzione l'insieme delle coppie (x, y) che appartengono a una determinata regione del piano. Per individuare tale regione si deve:

- considerare l'equazione $f(x, y) = 0$ e disegnare la curva ad essa associata che divide il piano in due o più regioni separate e complementari
- scegliere un punto A qualsiasi del piano che appartenga ad una delle regioni individuate dalla curva
- sostituire le sue coordinate nella disequazione: se la disuguaglianza ottenuta è vera, la regione di piano delle soluzioni è quella che contiene A.

Il sistema di riferimento nello spazio

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali nello spazio, ciascun punto è individuato da una terna ordinata di numeri (x, y, z) che rappresentano rispettivamente la sua ascissa, la sua ordinata e la sua quota. In tale sistema di riferimento, dati i punti $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, si ha che:

- la misura del segmento AB è $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

  e, in particolare, se AB è parallelo all'asse x $\rightarrow$ $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$

  se AB è parallelo all'asse y $\rightarrow$ $\overline{AB} = |y_2 - y_1|$

  se AB è parallelo all'asse z $\rightarrow$ $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$

- il punto medio M del segmento AB ha come coordinate la semisomma delle coordinate di A e di B:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Il piano e la sua equazione

Un piano nello spazio ha equazione della forma $ax + by + cz + d = 0$

In particolare:
- se $d = 0$ il piano passa per l'origine
- se manca una delle variabili, il piano è parallelo all'asse di quella variabile
- se mancano due variabili, il piano è parallelo al piano di quelle variabili.

Due piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono:

- paralleli se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
- perpendicolari se $aa' + bb' + cc' = 0$

Le funzioni di due variabili

Una funzione di due variabili è una legge che ad ogni coppia ordinata di numeri reali (x, y) appartenente a un insieme D associa uno e un solo numero reale z; si scrive in questo caso:

$$z = f(x, y)$$

Intersecando una superficie $z = f(x, y)$ con un piano parallelo ad uno dei piani coordinati, si ottengono delle funzioni di una sola variabile che hanno come immagini delle linee su tale piano. In particolare si parla di:

- **linee sezione** se si interseca la superficie con un piano $y = k$ parallelo al piano xz ed in questo caso si ottiene il fascio di curve di equazione $z = f(x, k)$; oppure se si interseca la superficie con un piano $x = k$ parallelo al piano yz ed in questo caso si ottiene il fascio di curve di equazione $z = f(k, y)$
- **linee di livello** se si interseca la superficie con un piano $z = k$ parallelo al piano xy ed in questo caso si ottiene il fascio di curve di equazione $f(x, y) = k$.

Le derivate parziali

Data una funzione $f(x, y)$, si definisce:

- **derivata parziale di f rispetto a x** in un punto $P(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito, per $h \to 0$ del rapporto incrementale relativo alla sola variabile x :

$$f'_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- **derivata parziale di f rispetto a y** in un punto $P(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito, per $k \to 0$ del rapporto incrementale relativo alla sola variabile y :

$$f'_y = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Per calcolare una derivata parziale si applicano le regole di derivazione delle funzioni di una sola variabile considerando l'altra come una costante.
Se le derivate parziali di una funzione f sono continue in un punto P, il **piano tangente** alla superficie in P ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se le derivate parziali prime sono funzioni a loro volta derivabili, si possono calcolare le derivate successive rispetto a una qualsiasi delle variabili:

f''_{xx}	è la derivata parziale di f'_x rispetto a x	f''_{yy}	è la derivata parziale di f'_y rispetto a y
f''_{xy}	è la derivata parziale di f'_x rispetto a y	f''_{yx}	è la derivata parziale di f'_y rispetto a x

Le ultime due derivate si chiamano **derivate miste** e, se sono continue in un insieme I, si verifica che $f''_{xy} = f''_{yx}$ in tutti i punti di I (teorema di Schwarz).

I punti stazionari

Data una funzione $f(x, y)$ ed un suo punto $P(x_0, y_0)$ si dice che:

- P è un **punto di minimo relativo** per f se esiste un intorno di P per tutti punti del quale vale la relazione $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$
- P è un **punto di massimo relativo** per f se esiste un intorno di P per tutti punti del quale vale la relazione $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

I punti stazionari sono i punti che annullano contemporaneamente le due derivate parziali prime f'_x e f'_y e si trovano quindi risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

Chiamiamo poi **hessiano** di $f(x, y)$ il determinante $H(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

Se $P(x_0, y_0)$ è un punto stazionario, allora esso rappresenta:

- un punto di minimo relativo se: $H(x_0, y_0) > 0 \quad \wedge \quad f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
- un punto di massimo relativo se: $H(x_0, y_0) > 0 \quad \wedge \quad f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
- un punto di sella se: $H(x_0, y_0) < 0.$

Non si può trarre alcuna conclusione sul punto P se $H(x_0, y_0) = 0$.

Massimi e minimi vincolati

Quando le variabili x e y di una funzione $f(x, y)$ sono soggette a dei vincoli che ne limitano il campo di variabilità, si parla di massimi e minimi vincolati per la funzione f.
Se, in particolare, il vincolo è espresso da un'equazione, i punti di massimo e di minimo si possono determinare:

- **con il metodo elementare**

  vincolo: $y = g(x)$ $\quad \rightarrow \quad$ si determinano i punti estremanti di $f(x, g(x))$

  vincolo: $x = h(y)$ $\quad \rightarrow \quad$ si determinano i punti estremanti di $f(h(y), y)$

- **con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange**

  vincolo: $g(x, y) = 0$ $\quad \rightarrow \quad$ si considera la funzione $L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ e si determina l'hessiano orlato:

$$H(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

  – se $H(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ $\quad \rightarrow \quad$ $P(x_0, y_0)$ è un punto di massimo

  – se $H(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ $\quad \rightarrow \quad$ $P(x_0, y_0)$ è un punto di minimo

Non si può dire nulla su P se $H(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$.