Approfondimento

Le equazioni lineari

Un'equazione goniometrica si dice **lineare** se assume la forma

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

con $a, b, c \in R$ e $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Per risolvere questo tipo di equazioni dobbiamo seguire procedure diverse a seconda che sia $c = 0$ (equazione *incompleta*) oppure $c \neq 0$ (equazione *completa*).

Le equazioni incomplete

L'equazione assume la forma $a \sin x + b \cos x = 0$
Per risolverla, posto $\cos x \neq 0$, dividiamo entrambi i membri per $\cos x$, ottenendo:

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad a \tan x + b = 0$$

che è un'equazione elementare che sappiamo risolvere.
L'operazione fatta è lecita in quanto i valori per cui $\cos x$ è uguale a 0 non sono soluzioni dell'equazione; infatti, quando $\cos x = 0$ (cioè per $x = 90° + k180°$) si ha che $\sin x$ è uguale a 1 oppure -1 e l'equazione diventa

$$a = 0 \qquad \text{oppure} \qquad -a = 0$$

cosa che è impossibile visto che abbiamo posto $a \neq 0$.

Esempi

a. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$
Dividendo per $\cos x$ otteniamo $\quad \tan x - \sqrt{3} = 0$
da cui $\quad \tan x = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad x = 60° + k180°$

b. $2 \sin x - 2 \cos x = 0$
Dividendo per $\cos x$ otteniamo $\quad 2 \tan x - 2 = 0$
da cui $\quad \tan x = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Le equazioni complete

Data l'equazione $a \sin x + b \cos x + c = 0$, possiamo pensare di associare ad essa la prima relazione fondamentale della goniometria ottenendo il sistema

$$\begin{cases} a \sin x + b \cos x + c = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

che, essendo la seconda delle sue equazioni sempre vera, è equivalente all'equazione data. Il sistema ottenuto è di secondo grado nelle incognite $\sin x$ e $\cos x$ e la sua risoluzione consente di determinare due coppie di valori di $\sin x$ e $\cos x$ dalle quali è poi possibile risalire ai valori di x.

Esempio

$\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0$

Scriviamo il sistema equivalente ottenuto con la prima relazione fondamentale:

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

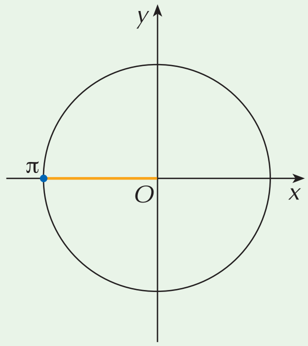
Ricaviamo $\sin x$ dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} \\ \left(\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} \\ 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

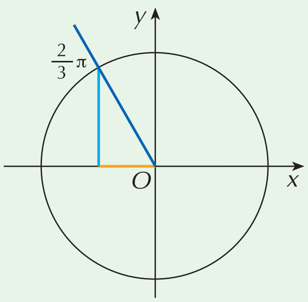
Risolvendo la seconda equazione otteniamo: $\cos x = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Risostituendo questi valori nella prima abbiamo le due soluzioni del sistema:

- $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases}$ che identifica gli angoli $x = \pi + 2k\pi$



- $\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ che identifica gli angoli $x = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$



Risolvi le seguenti equazioni lineari incomplete.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

Poiché $\cos x = 0$ non è soluzione dell'equazione, possiamo dividere entrambi i membri per $\cos x$ ottenendo

$$\sqrt{3}\,\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \quad \to \quad \sqrt{3}\tan x + 1 = 0 \quad \to \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Siamo così pervenuti alla risoluzione di un'equazione elementare, dalla quale ricaviamo che

$$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$$

2 $\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = 0$ $[30° + k180°]$

3 $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$ $[-60° + k180°]$

4 $\sin x + \cos x = 0$ $[135° + k180°]$

5 $3\cos x - 2\sin x = 0$ $[56°18'36'' + k180°]$

6 $4\sin x = 3\cos x$ $[36°52'12'' + k180°]$

7 $\sin x - \cos x = 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

8 $\sin(-x) + \sqrt{3}\cos x = 0$ $[60° + k180°]$

9 $\sin(180° - x) - \cos(-x) = 0$ $[45° + k180°]$

Risolvi le seguenti equazioni lineari complete.

10 **ESERCIZIO GUIDATO**

$-\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

L'equazione è equivalente al sistema $\begin{cases} -\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

Applicando il metodo di sostituzione, otteniamo $\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cos x - 1 \\ 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x = 0 \end{cases}$

e, risolvendo la seconda equazione $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \sqrt{3}\cos x - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \sqrt{3}\cos x - 1 \end{cases}$

da cui $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Quindi le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

11 $\sqrt{3}\sin x = 2 + \cos x$ $\left[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

12 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ $[45° + k360°]$

13 $\sin x = \sqrt{3}(1 - \cos x)$ $\left[2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

14 $\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} = 0$ $[30° + k360°;\ 90° + k360°]$

15 $\cos x + \sqrt{3}(1 - \sin x) = 0$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

16 $\sin x = \left(\sqrt{2} + 1\right)\cos x - 1$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$

17 $\sin x + \cos x = 1$ $\left[2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

18 $\sqrt{3}\sin x = \cos x + \sqrt{3}$ $[90° + k360°;\ 150° + k360]$

19 $\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = 3$ $\left[\frac{3}{2}\pi + 2k\pi;\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right]$

20 $\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

21 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sin x$ $[180° + k360°;\ 300° + k360°]$