Algebra booleana

Nel lavoro di programmazione capita spesso di dover ricorrere ai principi della logica degli enunciati e occorre conoscere i concetti di base dell'algebra delle proposizioni. L'algebra delle proposizioni è detta anche **algebra booleana** dal nome del matematico inglese *George Boole* (1815-1864).

Si dice **enunciato** una proposizione che può essere soltanto vera o falsa.

La verità o la falsità di un enunciato sono dette **valori di verità**; un enunciato può essere vero o falso, ma non entrambe le cose.

Esempi

- "oggi piove", "quel fiore è rosso" sono enunciati.
- "speriamo che non piova", "dove siete stati?" non sono enunciati in quanto non sono né veri né falsi.

Alcuni enunciati possono essere **composti**, vale a dire sono formati da sottoenunciati collegati tra loro da **connettivi**.

Esempio

- "egli è intelligente oppure studia tutta la notte" è un enunciato composto dai sottoenunciati "egli è intelligente" e "egli studia tutta la notte" collegati tra loro dal connettivo "oppure".

La proprietà fondamentale di un enunciato composto è che il suo valore di verità è intera-mente definito dai valori di verità dei suoi sottoenunciati e dal connettivo che li unisce.
Scopo di questo paragrafo è presentare i principali connettivi logici e di illustrarne le proprietà. Per indicare gli enunciati si usano di solito le lettere **p**, **q**, **r**,... .

Congiunzione (AND)

Due enunciati possono essere collegati dal connettivo "**e**" (in inglese e in informatica, **and**), in modo da formare un enunciato composto, detto **congiunzione** degli enunciati di partenza. In simboli **p and q** denota la congiunzione degli enunciati e viene letto "p e q".
Il valore di verità di **p and q** è dato dalla seguente tabella che costituisce la definizione di congiunzione:

p	q	p and q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Dove "V" (vero) e "F" (falso) sono valori di verità.

La prima riga indica in modo sintetico che se *p* è vera e *q* è vera, allora **p and q** è vera. Le altre righe hanno significato analogo. Si osservi che **p and q** è vera solo nel caso in cui sono veri entrambi i sottoenunciati.

Esempio:

- Londra è in Inghilterra e 2+2=4
- Londra è in Inghilterra e 2+2=5
- Londra è in Spagna e 2+2=4
- Londra è in Spagna e 2+2=5

Solo il primo enunciato è vero. Gli altri sono falsi perché almeno uno dei sottoenunciati è falso.

Disgiunzione (OR)

Due enunciati possono essere collegati dal connettivo "**o**" (in inglese e in informatica, **or**), in modo da formare un enunciato composto, detto **disgiunzione** degli enunciati di partenza. In simboli **p or q** denota la disgiunzione degli enunciati e viene letto "p o q". Il valore di verità di **p or q** è dato dalla seguente tabella che costituisce la definizione della disgiunzione:

p	q	p or q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si osservi che **p or q** è falsa solo nel caso in cui sono falsi entrambi i sottoenunciati.

Esempio:
- Londra è in Inghilterra o 2+2=4
- Londra è in Inghilterra o 2+2=5
- Londra è in Spagna o 2+2=4
- Londra è in Spagna o 2+2=5

Solo l'ultimo enunciato è falso. Gli altri sono veri perché almeno uno dei sottoenunciati è vero.

Disgiunzione esclusiva (XOR)

Due enunciati possono essere collegati dal connettivo "**o esclusivo**" (in inglese e in informatica, **xor**), in modo da formare un enunciato composto, detto **disgiunzione esclusiva** degli enunciati di partenza. In simboli **p xor q** denota la disgiunzione esclusiva degli enunciati e viene letto "p xor q". Il valore di verità di **p xor q** è dato dalla tabella seguente che costituisce la definizione della disgiunzione:

p	q	p xor q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si osservi che **p xor q** è vera solo nel caso in cui i due enunciati **p**, **q** hanno valori di verità diversi, mentre **p xor q** risulta falsa se i valori di verità di **p**, **q** sono uguali.

Esempio:
- Londra è in Inghilterra o 2+2=4
- Londra è in Inghilterra o 2+2=5
- Londra è in Spagna o 2+2=4
- Londra è in Spagna o 2+2=5

Solo il secondo e terzo enunciato sono veri. Gli altri sono falsi perché i due sottoenunciati hanno valore di verità uguale.

Osservazione
Nella lingua italiana la particella "o" può assumere due significati diversi. In alcuni casi viene utilizzata come "p o q o entrambi" (disgiunzione *or*), in altri casi viene intesa con il significato di "p o q ma non entrambi" (disgiunzione esclusiva *xor*). Per esempio, se si dice: "ha vinto alla lotteria o ha avuto una eredità", si intende che può esser vero "ha vinto alla lotteria" (p) o può esser vero "ha avuto una eredità" (q) o possono esser veri entrambi. Se, invece, si dice: "va a Roma o va a Milano", si esclude che possano essere veri entrambi i sottoenunciati.

Negazione (NOT)

Dato un enunciato **p**, è possibile formare un altro enunciato che si indica con **not p** e che è detto **negazione** di **p**. Nel linguaggio corrente la negazione di **p** si ottiene anteponendo a **p** "non è vero che…" oppure inserendo in **p** la parola "non".
Il valore di verità di **not p** è dato dalla tabella:

p	not p
V	F
F	V

Esempio:

- Londra è in Inghilterra
- Londra non è in Inghilterra
- Non è vero che Londra è in Inghilterra

Il secondo e il terzo enunciato sono entrambi la negazione del primo.

È opportuno osservare che esistono diverse notazioni per indicare i connettivi "e", "o" e "non":

"e"	=	**p et q, p & q, p×q, p∧q, p and q**
"o"	=	**p vel q, p+q, p∨q, p or q**
"o esclusivo"	=	**p aut q, p xor q**
"non"	=	**non p, p′, $\overline{p}$, ¬p, not p**

I simboli usati più frequentemente in informatica sono **and, or, xor, not.**

Tavole di verità

Combinando in vario modo gli enunciati semplici del tipo **p**, **q**, **r**, … e i connettivi **and**, **or** e **not** si possono ottenere enunciati composti sempre più complessi. Quando gli enunciati **p**, **q**, **r**, … che formano un enunciato composto **P(p, q, r, …)** sono variabili, l'enunciato che si ottiene viene chiamato **forma enunciativa**. Il valore di verità di una forma enunciativa è noto quando lo sono i valori di verità delle sue variabili. Un modo semplice e schematico per mostrare questo rapporto è quello di costruire una **tavola di verità**.
Si consideri, per esempio, la forma enunciativa **not(p and not q)**. La tavola di verità si costruisce nel seguente modo:

p	q	not q	p and not q	not(p and not q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Le prime due colonne indicano tutte le combinazioni dei valori che possono essere assunti dalle variabili **p** e **q**: ci sono tante righe quante sono queste combinazioni (con due variabili sono necessarie quattro righe, con tre variabili otto righe, ... con *n* variabili 2^n righe). Segue una colonna per ogni operazione indicata nella forma enunciativa. La sequenza con cui costruire le diverse colonne è definita dalla seguente regola: si procede dalle parentesi più interne verso l'esterno ed entro la medesima parentesi l'ordine di esecuzione delle operazioni è: **not, and, or**.
Alla fine si ottiene il valore di verità della forma enunciativa.

Esempio

Si trovi la tavola di verità della forma enunciativa **p or (q and r)**

p	q	r	q and r	p or (q and r)
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Equivalenza logica e proprietà dell'algebra booleana

Si dice che due forme enunciative sono equivalenti quando hanno la medesima tavola di verità.

Esempio

Si dimostri che le forme enunciative **(p and q) or not p** e **not p or q** sono equivalenti.

Tavola di verità di **(p and q) or not p**:

p	q	p and q	not p	(p and q) or not p
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Tavola di verità di **not p or q:**

p	q	not p	not p or q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Poiché le due forme enunciative hanno la medesima tavola di verità possiamo dire che sono equivalenti e si scrive: **(p and q) or not p ≡ not p or q**.
Attraverso le equivalenze logiche si possono esprimere le **leggi** (o *proprietà*) dell'algebra booleana. Nella tabella seguente vengono riportate alcune tra le più significative:

Idempotenza	
p or p ≡ p	**p and p ≡ p**

Associatività	
(p or q) or r ≡ p or (q or r)	**(p and q) and r ≡ p and (q and r)**

Commutatività	
p or q ≡ q or p	**p and q ≡ q and p**

Distributività	
p or (q and r) ≡ (p or q) and (p or r)	**p and (q or r) ≡ (p and q) or (p and r)**

Doppia negazione
not not p ≡ p

Leggi di De Morgan	
not (p or q) ≡ not p and not q	**not (p and q) ≡ not p or not q**

Si noti che le **leggi di De Morgan** trovano riscontro anche nel linguaggio quotidiano.

Esempio

Si prenda in considerazione la frase

"Se piove o tira vento, esco con l'impermeabile".

Ponendo **p**="piove" e **q**="tira vento", si può schematizzare la frase precedente così:

"Se **p or q,** esco con l'impermeabile".

Volendo indicare la condizione opposta alla precedente, si può scrivere:

"Se **not (p or q)**, non esco con l'impermeabile"

Ma per la legge di De Morgan si può anche scrivere:

"Se **not p and not q**, non esco con l'impermeabile"

ed infatti si dice:

"Se non piove **e** non tira vento, non esco con l'impermeabile".