1.5 Operazioni in binario

Vediamo come eseguire le principali operazioni utilizzando numeri binari.

Addizione

Nel sistema decimale per eseguire un'addizione, per esempio 39+145 occorre:

- mettere in numeri in colonna allineando la virgola (o la cifra delle unità)

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 9 & + \\ 1 & 4 & 5 & = \\ \hline \end{array}$$

- Sommare le cifre partendo da destra, se c'è una somma maggiore di 9, occorre tenere conto del riporto. Nell'esempio 9+5=1 col riporto di 4.
- e così via:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 9 & + \\ 1 & 4 & 5 & = \\ & {\scriptstyle 1} & & \\ \hline 1 & 8 & 4 & \end{array}$$

Nel sistema binario si procede esattamente nello stesso modo, tenuto conto che:

- 0 + 0 = 0
- 0 + 1 = 1
- 1 + 0 = 1
- 1 + 1 = 10, cioè 0 col riporto di 1

Quindi, se dovessimo sommare 10101+1011

- allineiamo a destra
- iniziamo a sommare da destra
- 1+1: scriviamo 0 con il riporto di 1
- e così via ...

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\ & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

Sottrazione

Per eseguire la sottrazione si può, procedendo come in precedenza, utilizzare una procedura analoga a quella utilizzata nel sistema decimale. In questo caso è molto più comodo però utilizzare i **complementi**.
Ragioniamo in decimale. Per calcolare 1342-228 posso calcolare il complemento di 228 (che è quello che manca per arrivare a 10000):

10000 – 228 = 9772 (è il complemento di 228) e sommarlo a 1342, non considerando l'ultimo riporto

1342 + 9772 = 11114 quindi 1114

infatti

1342 – 228 = 1114

Nel sistema decimale, sommare il complemento al posto di sottrarre, può sembrare assurdo. Nel sistema binario risulta invece molto comodo poichè il complemento si calcola facilmente: basta cambiare tutte le cifre e aggiungere 1.

Quindi per eseguire 10001 – 1011:

- calcolo il complemento di 1011
  - cambio tutte le cifre 0100
  - aggiungo 1: 0100 + 1 = 0101
- sommo, come visto sopra, il complemento:
  - 10001 + 0101 = 10110
  - ignoro la prima cifra, quindi 0110 che è 110.

Proviamo con un secondo esempio: 101010 – 11000

- calcolo il complemento di 11000
  - cambio tutte le cifre 00111
  - aggiungo 1: 00111 + 1 = 01000
- sommo il complemento
  - 101010 + 01000 = 110010
  - ignoro la prima cifra, quindi il risultato è 10010.

Moltiplicazione

Come nei casi precedenti vediamo come si esegue la moltiplicazione nel sistema decimale, per esempio 134 x 51.

- Si scrivono i numeri in colonna

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 4 & \text{x} \\ & 5 & 1 & = \\ \hline \end{array}$$

- si moltiplica il primo numero per la cifra più a destra del secondo numero

$$\begin{array}{rrrr} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \text{x} \\ & 5 & \mathbf{1} & = \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \end{array}$$

- si passa alle altre cifre del secondo numero, spostando sempre a sinistra il numero di un posto

$$\begin{array}{rrrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \text{x} \\ & & \mathbf{5} & 1 & = \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{-} & \end{array}$$

- si esegue la somma

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 3 & 4 & \times \\
 & & 5 & 1 & = \\
\hline
 & 1 & 3 & 4 & \\
6 & 7 & 0 & - & \\
\hline
6 & 8 & 3 & 4 &
\end{array}
$$

Nel sistema binario si esegue lo stesso procedimento che però risulta molto più semplice in quanto i prodotti possono essere solo per la cifra 0 (e quindi il risultato è 0) o per la cifra 1 (e quindi si copia il numero come è).

Per esempio calcoliamo 10001 x 1011

- Si scrive in colonna

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
\end{array}
$$

- moltiplica per 1 (quindi si copia il primo numero)

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

- poi per le altre cifre (spostandosi sempre di una cifra a sinistra)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & - & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & - & - & - &
\end{array}
$$

- si somma

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & - & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & - & - & - & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

In generale si evita di scrivere la riga con tutti gli zeri: per ogni zero del secondo numero si sposta una volta di più il numero successivo verso sinistra. Per esempio:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & = \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Divisione

Per comprendere più facilmente la divisione di due numeri binari, facciamo riferimento a un esempio.

1 1 1 1 0 1 1 diviso 1 0 1

- dapprima si separano le prime tre cifre del dividendo e si dividono per il divisore ottenendo come quoziente 1

```
1 1 1 1 0 1 1 : 1 0 1
                -----
                1
```

- si moltiplica il quoziente e il divisore scrivendo il risultato incolonnato sotto il dividendo e si effettua la sottrazione (ricordare le regole della sottrazione binaria)

```
1 1 1 1 0 1 1 : 1 0 1
                -----
1 0 1           1
-----
  1 0
```

- si abbassa la cifra a destra e si ripete la divisione, come prima

```
1 1 1 1 0 1 1 : 1 0 1
                -----
1 0 1           1 1
-------
  1 0 1
  1 0 1
  -----
      0
```

- si abbassa un'altra cifra a destra, e così via fino a quando tutte le cifre sono state abbassate, ottenendo alla fine il quoziente e il resto della divisione

```
1 1 1 1 0 1 1 : 1 0 1
                ---------
1 0 1           1 1 0 0 0
-------
  1 0 1
  1 0 1
  -------
      0 0
        0
      -----
        0 1
          0
        -----
          1 1
            0
          ---
          1 1
```

Per esercizio, si effettui la divisione di due numeri binari e poi si controlli la correttezza del risultato trasformando dividendo, divisore, quoziente e resto in numeri decimali e confrontando il quoziente e resto, ottenuti con la divisione binaria, con il quoziente e resto ottenuti con la divisione decimale.